

## SOLUÇÕES DE REFERÊNCIA PARA ESCOAMENTO DE FLUIDOS MUITO ELÁSTICOS ATRAVÉS DE CONTRACÇÕES

**Manuel A. Alves\*, Paulo J. Oliveira\*\*, Fernando T. Pinho\*\*\***

\* Departamento de Eng. Química, CEFT,  
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal  
e-mail: mmalves@fe.up.pt, web <http://www.fe.up.pt>

\*\* Departamento de Eng. Electromecânica  
Universidade da Beira Interior  
6201-001 Covilhã, Portugal  
e-mail: pjpo@ubi.pt, web <http://www.ubi.pt>

\*\*\* Centro de Estudos de Fenómenos de Transporte, DEMEGI,  
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal  
e-mail: fpinho@fe.up.pt, web <http://www.fe.up.pt/~fpinho/>

**Palavras chave:** Viscoelástico, FVM, Contracção, PTT.

**Resumo.** *São apresentados resultados numéricos, obtidos com o método dos volumes finitos, para o escoamento de um fluido viscoelástico através de uma contracção plana. O fluido segue o modelo constitutivo de Phan-Thien e Tanner (PTT) e a contracção tem uma razão de áreas de 4 para 1. Devido à utilização de malhas computacionais muito refinadas e métodos de alta resolução na discretização dos termos convectivos da equação constitutiva, a precisão numérica é elevada e os resultados podem ser usados para efeitos de comparação ("benchmarking"). É feito o estudo assintótico do comportamento das tensões e velocidade junto ao canto interior da contracção.*

## 1. INTRODUÇÃO

O cálculo de escoamentos viscoelásticos é importante em várias aplicações, como sejam a extrusão de polímeros, o fabrico de pastas alimentares, o processamento de geis e tintas, e muitas outras [1]. As equações a resolver num problema com fluidos viscoelásticos são as habituais equações da conservação de massa e quantidade de movimento, acrescidas de um conjunto de equações às derivadas parciais que representam o transporte das componentes do tensor das tensões. Normalmente este conjunto total de equações não se consegue resolver de forma analítica e por isso são necessários métodos numéricos. Entre estes, têm sido usados predominantemente os métodos de volumes finitos e os de elementos finitos, cada um tendo as suas vantagens e desvantagens.

Neste trabalho iremos considerar a resolução numérica, pelo método dos volumes finitos, de escoamentos de fluidos viscoelásticos. Comparativamente ao caso Newtoniano, o cálculo de escoamentos de fluidos viscoelásticos vai introduzir uma série de dificuldades que passamos a listar:

- Acoplamento de três campos de variáveis: velocidades, pressão e tensões.
- Equações independentes para o transporte do campo de tensões (um tensor de segunda ordem) que necessitam de ser resolvidas conjuntamente com as equações do escoamento.
- Necessidade de utilizar malhas computacionais muito finas para que se torne possível resolver, com precisão suficiente, as camadas limite de tensões junto a paredes e em regiões próximas de pontos singulares (onde as tensões tendem para infinito).
- Necessidade de utilizar esquemas de diferenças de ordem superior, sobretudo para a representação dos termos em 1ª derivada nas equações hiperbólicas que regem o transporte das tensões, equações estas que não contêm qualquer termo difusivo.

Os resultados que vamos apresentar dizem respeito aos dois últimos pontos acabados de listar, para um determinado modelo não-linear de fluido viscoelástico (o modelo de Phan-Thien e Tanner [2]) quando este se escoar através duma contracção plana bidimensional. Um esquema de diferenças de ordem superior, especialmente concebido para fluidos viscoelásticos, irá ser aplicado conjuntamente com a utilização de malhas muito refinadas, contendo um número superior a 1 milhão de graus de liberdade, de forma a se obter resultados passíveis de serem utilizados como resultados de referência (*benchmark results*). Este estudo vem na sequência de estudos anteriores pelos mesmos autores ([3-6]), onde a mesma geometria de escoamento foi considerada, e os resultados

são válidos para uma gama mais ampla de valores da elasticidade do fluido, com uma precisão numérica superior à obtida por outros autores ([7,8]).

## 2. MODELO MATEMÁTICO

O escoamento de um líquido incompressível (massa específica  $\rho$ ) constituído por um solvente Newtoniano (viscosidade  $\eta_s$ ) misturado com um polímero não-Newtoniano deve obedecer às equações de conservação de massa:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

e conservação de quantidade de movimento

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla \cdot (\eta_s \nabla \mathbf{u}) \quad (2)$$

que servem para determinar o campo de velocidades  $\mathbf{u}$  e o campo de pressão  $p$ . O tensor das tensões elásticas, resultante do efeito do polímero no movimento do líquido, deve então ser determinado através de uma equação constitutiva. Neste trabalho vai usar-se o modelo de Phan-Thien e Tanner (PTT) [2], que corresponde à seguinte equação às derivadas parciais:

$$\lambda \frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} + \left(1 + \frac{\lambda \varepsilon}{\eta_p} \text{tr}(\boldsymbol{\tau})\right) \boldsymbol{\tau} = \eta_p (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \lambda (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (3)$$

onde  $\lambda$  é o tempo de relaxação do fluido,  $\eta_p$  um coeficiente de viscosidade do polímero, e  $\varepsilon$  um parâmetro do modelo. Este modelo representa de forma aproximadamente adequada a reologia de soluções concentradas de polímeros e de fundidos poliméricos (*vide* [9]) que, devido a uma alta viscosidade e baixas velocidades, conduzem a escoamentos laminares. Tem sido usado em muitos trabalhos de simulação numérica (por exemplo [10]).

A escolha das propriedades do fluido e parâmetros do modelo depende, como é óbvio, das características do fluido real que se pretende modelar. Como os escoamentos que nos interessam se processam a velocidades muito baixas, iremos assumir que o número de Reynolds do escoamento é nulo,  $Re = \rho UL / \eta = 0$ , onde  $\eta = \eta_s + \eta_p$  e  $U$  e  $L$  são uma velocidade e um comprimento característicos do problema. No caso da geometria em estudo,  $U$  será a velocidade média no canal de saída e  $L$  a semi-largura do mesmo. Para facilitar a comparação com resultados de outros autores iremos considerar o caso

$\beta = \eta_s / \eta = 1/9$  (valor encontrado em inúmeros trabalhos, e que implica que a viscosidade do solvente é pequena comparada com a viscosidade da mistura). O valor de  $\varepsilon$  está relacionado com propriedades elongacionais do fluido: para  $\varepsilon = 0$  o fluido apresenta viscosidade elongacional infinita para um determinado valor finito da taxa de estiramento (tornando-se equivalente ao fluido Oldroyd-B [9]). Neste trabalho irá tomar-se  $\varepsilon = 0.25$ , um valor típico para fundidos poliméricos tal como feito noutros trabalhos documentados na literatura especializada ([4,7,8]).

### 3. MODELO NUMÉRICO

Como referido acima irá utilizar-se o método dos volumes finitos na discretização das Eqs. (1) a (3). As equações algébricas de partida deste método são obtidas por integração sobre um volume de controlo das equações diferenciais dadas na secção anterior. A malha computacional é constituída pela união de todos os volumes de controlo, designados como "células", estando os valores de todas as variáveis dependentes e independentes (propriedades, etc) definidos nos centros dessas células. Em geral, as derivadas das equações de partida são substituídas por diferenças centrais, as interpolações necessárias para a obtenção de valores nas faces das células são lineares, e os integrais subjacentes são obtidos pela regra do ponto médio. Todas estas operações garantem uma aproximação de segunda ordem. Os únicos termos nas Eqs. (1) a (3) que necessitam de tratamento especial são os termos convectivos; para estes utilizar-se-á o método de alta resolução CUBISTA, descrito em [11]. Este esquema de diferenças é formalmente de terceira ordem no espaço, garantindo uma ordem de convergência superior a dois em problemas com convecção dominante, e assegurando ainda uma boa "robustez" (isto é, propiciando convergência iterativa nos métodos implícitos aqui utilizados). É implementado explicitamente através de um processo de correcção diferida (*deferred correction*) sugerido em [12].

A equação discretizada correspondente à equação da conservação da massa (1) é:

$$\sum_f F_f = 0 \quad (4)$$

onde  $F_f$  representa o fluxo mássico que sai da célula em questão através da sua face  $f$  ( $f$  varia de 1 a 6, no caso genérico tridimensional). A forma linearizada da equação algébrica correspondente à conservação da quantidade de movimento é dada por:

$$a_p \mathbf{u}_p = \sum_F a_F \mathbf{u}_F + S_{HRS}(\mathbf{u}) + S(\boldsymbol{\tau}) + \frac{\rho V}{\delta t} \mathbf{u}_p^n \quad (5)$$

onde  $a_p$  e  $a_F$  são coeficientes (incluem efeitos convectivos e difusivos), e os termos fonte  $S$  no segundo membro representam, sucessivamente, o efeito devido ao esquema de alta resolução (HRS=*High Resolution Scheme*), o efeito do termo devido às tensões elásticas, e o termo de inércia resultante da variação temporal da quantidade de movimento. Neste trabalho não é objectivo obter soluções precisas na evolução temporal, pelo que este último termo é usado de forma equivalente a uma subrelaxação das equações.

A equação constitutiva discretizada vai ter uma forma análoga à da equação da quantidade de movimento, isto é:

$$a_p^\tau \boldsymbol{\tau}_p = \sum_F a_F^\tau \boldsymbol{\tau}_F + S_{HRS}^\tau(\boldsymbol{\tau}) + S^\tau(\boldsymbol{\tau}, \nabla \mathbf{u}) + \frac{\lambda V}{\delta t} \boldsymbol{\tau}_p^n \quad (6)$$

A diferença é que nesta equação os coeficientes  $a_p^\tau$  e  $a_F^\tau$  contêm unicamente efeitos convectivos e existe um termo fonte dependente do próprio campo de tensões e de gradientes de velocidade.

Os sistemas de equações lineares (5) e (6), juntamente com um sistema simétrico positivo-definido para a pressão, obtido de (4), são resolvidos por métodos de gradientes conjugados. Ao fim de um passo no tempo  $\delta t$ , os novos campos de velocidade  $\mathbf{u}$  e tensão  $\boldsymbol{\tau}$  correspondem a um nível de tempo mais recente ( $n+1$ ), isto é  $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\tau}^{n+1} = \boldsymbol{\tau}$ , o contador  $n$  é avançado, e o processo é repetido até se atingir convergência iterativa. Nessa altura, está-se na posse da solução do problema em regime estacionário. Mais detalhes sobre o método numérico e a metodologia usada para garantir o acoplamento pressão-velocidade-tensão podem ser consultados em [3].

## 4. RESULTADOS

### 4.1. Geometria do escoamento

Vai estudar-se numericamente o escoamento laminar que ocorre numa contracção plana, onde uma corrente com velocidade média  $U_1$  se processa ao longo de um canal com semi-altura  $H_1$  que, em  $x=0$ , reduz subitamente para  $H_2$  e cuja velocidade média aumenta para  $U_2$  (Figura 1). A razão de contracção é definida por  $H_1/H_2$ , sendo igual a 4 neste problema *benchmark*. Considera-se ainda que existe simetria em torno do plano central ( $y=0$ ) pelo que basta fazer o estudo em metade do domínio total, desde o plano de simetria (ou linha central), em  $y=0$ , até às paredes do canal localizadas em  $y=H_1$

para  $x < 0$ , e  $y = H_2$  para  $x > 0$ . Estudos preliminares mostraram que comprimentos de entrada de  $L_1 = 40H_2$  e de saída de  $L_2 = 100H_2$  são suficientes para garantir que não há efeitos parasitas no escoamento junto à contracção, e que o escoamento volta a desenvolver-se completamente a jusante da contracção (excepto para  $De=50$  e  $100$ , para os quais foram usadas malhas com  $L_2 = 500H_2$ , para garantir o total desenvolvimento das tensões a jusante da contracção).

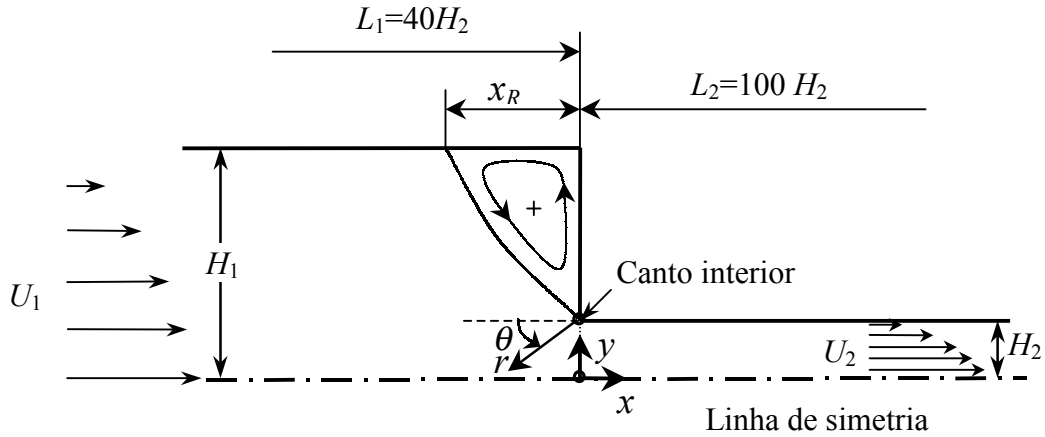


Figura1. Representação esquemática da contracção plana.

#### 4.2. Malhas computacionais

Usaram-se 6 malhas sucessivamente refinadas cujas características são apresentadas na Tabela 1. O número de graus de liberdade (DOF) obtém-se do número total de células internas (NC) após multiplicação por 6 (2 componentes da velocidade, 1 pressão, e 3 componentes de tensão, no caso bidimensional em consideração). Todas as malhas são refinadas localmente junto ao canto interior ( $x=0, y=1$ ), por forma a ser possível resolver numericamente com precisão adequada os elevados gradientes de tensão que aí ocorrem. Os valores das dimensões das células na vizinhança do canto interior são também apresentados na Tabela 1 ( $\delta x_{\min}$  e  $\delta y_{\min}$ , normalizados com  $H_2$ ). As malhas M4, M5 e M6 são mais finas do que as usadas em estudo anterior [4] o que, conjuntamente com o esquema de diferenças de alta resolução CUBISTA, vai permitir obter resultados de elevada precisão, susceptíveis de serem utilizados como resultados de referência (*benchmark*). Por exemplo, a malha mais fina M6 apresenta, junto ao canto interior, células com tamanho adimensional  $0.0035 \times 0.0035$  e com taxa de expansão da dimensão da malha inferior a 2%. Isto significa que a dimensão da malha varia localmente de forma muito suave, podendo considerar-se como sendo praticamente uniforme (localmente). Para efeitos ilustrativos, a Figura 2 mostra uma ampliação da malha M3 (a malha mais fina M6 possui demasiadas células, o que torna a figura imperceptível).

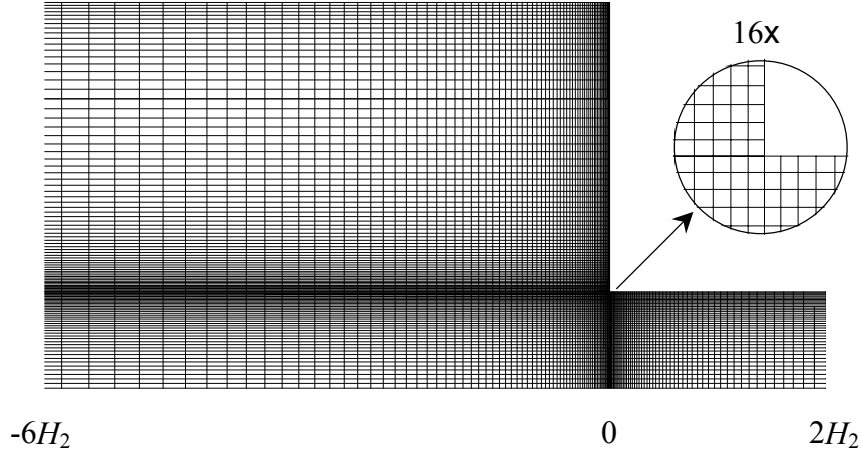


Figura 2. Malha M3 (na vizinhança do plano de contracção) usada nas simulações . Detalhe junto ao canto interior.

Tabela 1. Características das malhas usadas.

Malha	NC	DOF	$\delta x_{\min} = \delta y_{\min}$
M1	5282	31 692	0.020
M2	10587	63 522	0.014
M3	21 128	126 768	0.010
M4	42 348	254 088	0.0071
M5	84 512	507 072	0.0050
M6	169 392	1 016 352	0.0035

#### 4.3. Linhas de corrente

A visualização numérica das características do escoamento na zona da contracção para valores crescentes de elasticidade (proporcional ao número de Deborah,  $De = \lambda U_2 / H_2$ ) é mostrada na Figura 3. O espaçamento entre linhas de corrente é constante, sendo de 0.1 no escoamento principal ( $\psi / U_2 H_2$  de 0 a 1), e de  $\delta \psi / U_2 H_2 = 2 \times 10^{-4}$  no interior da recirculação para  $De \leq 5$  e  $\delta \psi / U_2 H_2 = 5 \times 10^{-4}$  para  $De > 5$ .

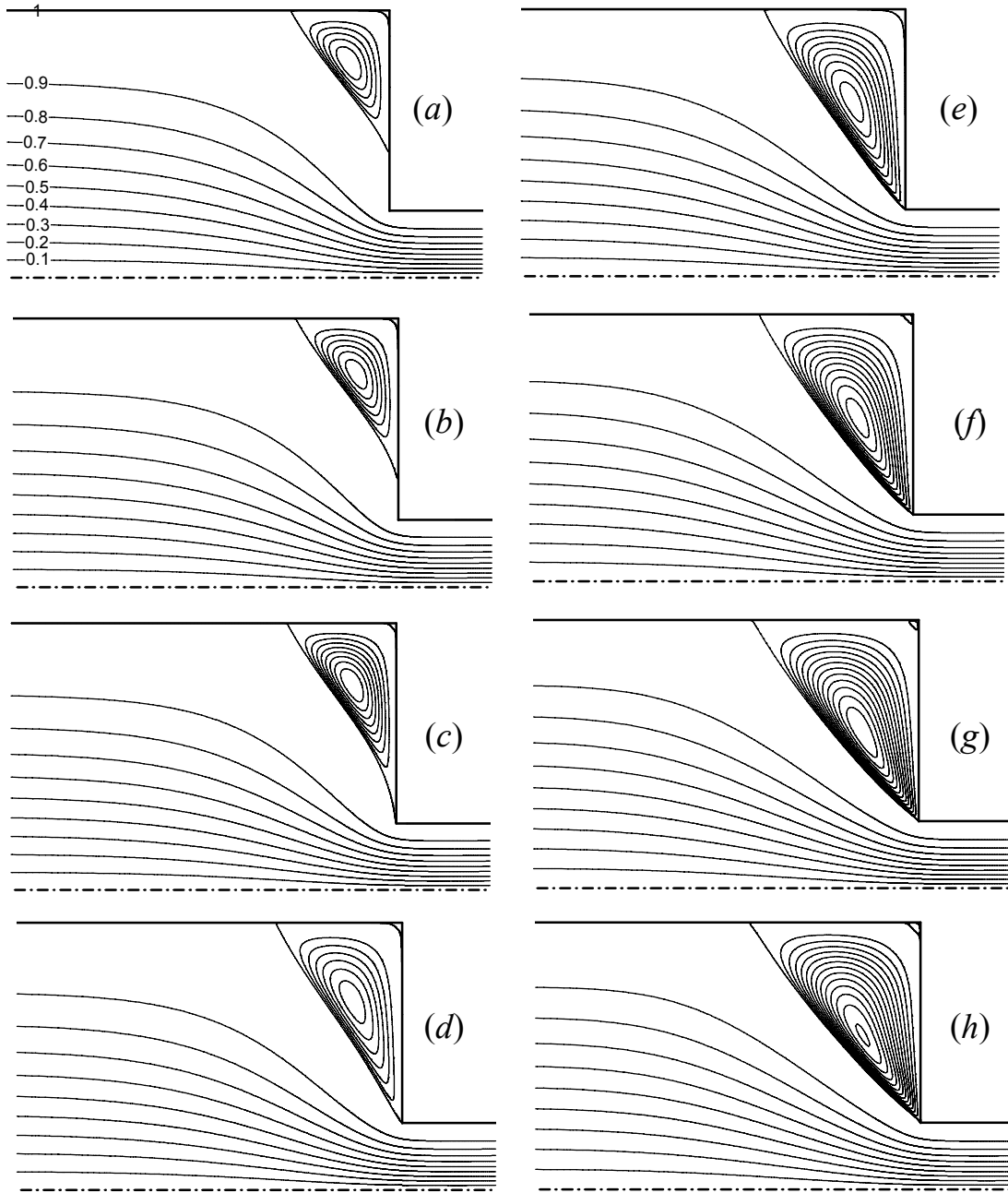


Figura 3. Linhas de corrente para valores crescentes de elasticidade. (a)  $De=0$  (Newtoniano); (b)  $De=1$ ; (c)  $De=2$ ; (d)  $De=5$ ; (e)  $De=10$ ; (f)  $De=20$ ; (g)  $De=50$ ; (h)  $De=100$ . Espaçamento da função de corrente no interior da recirculação:  $\psi/U_2H_2=2\times 10^{-4}$  para  $De=0-5$ ;  $\delta\psi/U_2H_2=5\times 10^{-4}$  para  $De=10-100$ .



A Figura 3 deve ser comparada com a Figura 21 de Aboubacar, Matallah and Webster [8]; estes autores conseguiram convergência do seu método numérico apenas até  $De=9$ , ao passo que no presente trabalho a gama de elasticidade foi estendida até  $De=100$ . Observa-se um aumento progressivo do tamanho ( $X_R = x_R/H_2$ ) e intensidade ( $\Psi_R = (\psi_R/U_1 H_1) - 1$ ) do vórtice de canto, aumento esse que vai sendo menos significativo à medida que  $De$  cresce. Este efeito é ilustrado nas Figuras 4 e 5 que mostram, respectivamente, as variações de  $X_R$  e de  $\Psi_R$  com  $De$ , em escala semi-logarítmica. Repare-se que, para o fluido PTT com  $\varepsilon=0.25$ , já não existe efeito significativo do refinamento de malha sobre os resultados para  $X_R$  (Fig. 4), quando se passa da malha M4 para M6, mas a intensidade do vórtice é ainda ligeiramente afectada (Fig. 5). A precisão dos presentes resultados é da ordem de 0.1 % para  $X_R$  e de 1 % para  $\Psi_R$ . Estes resultados são fornecidos na Tabela 2, e referem-se à malha mais refinada M6. Um ponto a realçar é que para o fluido PTT com  $\varepsilon=0.25$  não aparece nenhum vórtice de entrada (*lip vortex*), ao contrário do que acontece para o fluido Oldroyd-B ([6,7]) - deste modo conclui-se que a formação do vórtice de entrada deverá estar associada às elevadas tensões elongacionais geradas por modelos constitutivos do tipo de Maxwell, com ou sem viscosidade do solvente.

Os resultados de [8], mostrados nas Figs. 4 e 5 para comparação, desviam-se dos presentes para alguns valores de  $De$ . Parece notório, sobretudo da evolução de  $\Psi_R$ , que os resultados de [8] se desviam dos nossos à medida que  $De$  aumenta, sendo de suspeitar que os resultados para o caso de maior elasticidade ( $De=9$ ) estão substancialmente incorrectos (o processo numérico estava no limiar da divergência). O facto de tanto o tamanho do vórtice como a sua intensidade serem superiores aos aqui obtidos, correspondendo portanto a vórtices de intensidade artificialmente exagerada, é indicativo de deterioração na precisão numérica (ver [5]).

Tabela 2. Valores *benchmark* para  $X_R$  e  $\Psi_R$  obtidos neste estudo (malha M6).

$De$	0	1	2	5	10	20	50	100
$X_R$	1.500	1.542	1.638	1.898	2.132	2.323	2.497	2.579
$\Psi_R \times 10^3$	1.175	1.340	1.783	3.321	4.794	5.786	6.451	6.579

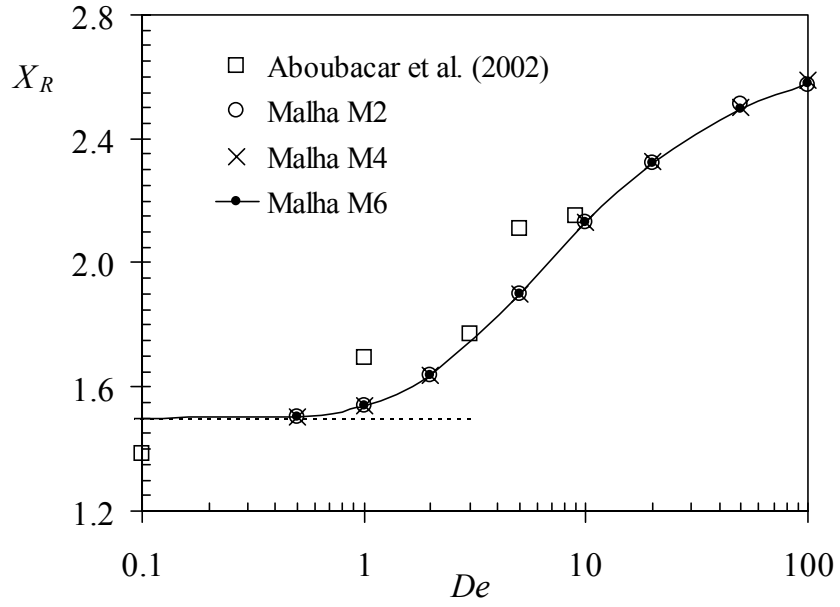


Figura 4. Variação do comprimento da recirculação,  $X_R=x_R/H_2$ , com o número de Deborah.

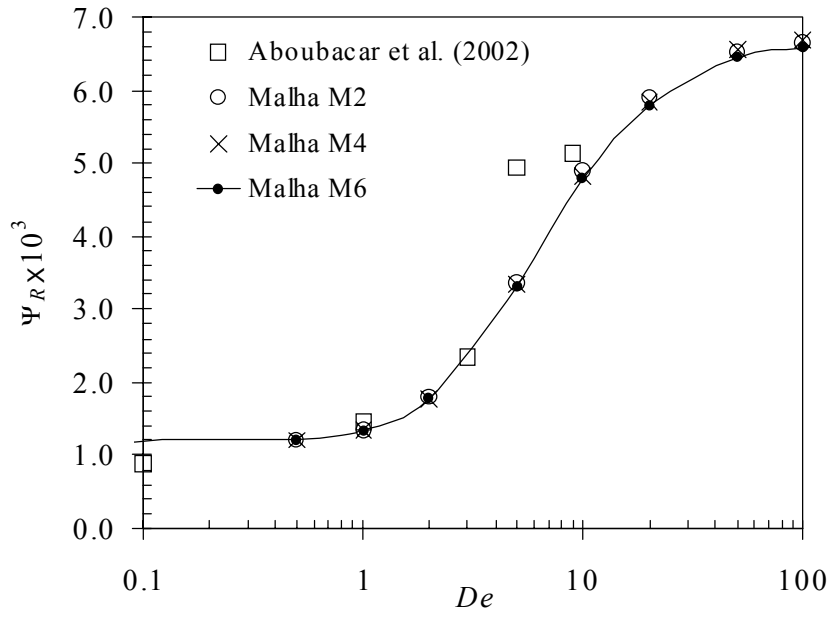


Figura 5. Variação da intensidade de recirculação  $\Psi_R$  com o número de Deborah.

#### 4.4. Algumas características do escoamento

A variação da tensão normal  $\tau_{xx}$  ao longo da linha central dos canais ( $y=0$ ) é mostrada na Figura 6, para vários valores do número de Deborah ( $De=1, 5, 10, 20, 50, 100$ ). Estes resultados foram obtidos na malha mais fina (M6). Na parte (a) desta figura as tensões estão adimensionalizadas com o valor fixo  $\tau_w = 3\eta U_2 / H_2$  (igual à tensão de corte que ocorre na parede do canal de saída para um fluido Newtoniano), enquanto na parte (b) estão adimensionalizadas com o valor da tensão desenvolvida na parede a jusante da contracção, para o próprio fluido PTT. Como o fluido PTT é reofluidificante (*shear thinning*),  $\tau_{w,PTT}$  diminui quando  $De$  aumenta, e o efeito da elasticidade fica mais claro (Figura 6 (b)).

Refira-se, no entanto, que mesmo com esta normalização "variável", o máximo da tensão normal parece atingir um valor máximo limite para  $De \approx 20$ , e a partir desse ponto esse valor máximo diminui. Fica no entanto notório, com esta normalização, o importante efeito convectivo sobre as tensões, com  $\tau_{xx}$  a diminuir gradual e lentamente ao longo do canal mais estreito, para os casos de  $De$  elevado.

Perfis da variação axial da velocidade ao longo da linha central são representados na Figura 7 (a). Existe uma sobre-elevação (*overshoot*) no desenvolvimento da velocidade axial  $u/U_2$ , à entrada para o canal mais estreito. Essa sobre-elevação aumenta com a elasticidade, embora tendendo para um grau relativamente insensível à elasticidade.

Quando a velocidade é normalizada com a velocidade máxima em escoamento completamente desenvolvido para o fluido PTT (Figura 7 (b)) a variação relativa do "overshoot" é semelhante à observada para as tensões normais na Figura 6 (b).

#### 4.5. Comportamento assíntótico no canto interior

O canto interior da contracção constitui um ponto singular para as tensões, o que significa que estas crescem na sua proximidade como:

$$\tau \propto r^p \quad \text{e} \quad u \propto r^m \quad (7)$$

com  $p < 0$ , e onde  $r$  representa a distância radial ao canto. As velocidades devem tender para zero, pelo que o índice  $m$  é positivo. Existem estudos teóricos que permitem avaliar, com algum grau de aproximação, os índices da singularidade  $p$  e  $m$ , tanto para fluido de viscosidade constante como UCM ou Oldroyd-B ([13],[14]), como fluido reofluidificante do tipo PTT [15]. Os resultados numéricos obtidos durante o presente estudo, nas diferentes malhas mas sobretudo nas mais refinadas, vão permitir verificar se as aproximações introduzidas nesses estudos teóricos são justificadas. As Figuras 8 (a) e 8 (b) mostram, respectivamente, o comportamento assíntótico junto ao canto das componentes  $u$  e  $v$  da velocidade, e das três componentes da tensão ( $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  e  $\tau_{xy}$ ), ao longo da linha  $\theta = \pi/2$  (vide Fig. 1). Observa-se que ambas as componentes da velocidade se comportam como  $u, v \propto r^{5/9}$  enquanto as tensões variam como  $\tau_{ij} \propto r^{-0.329}$ .

Estes índices de singularidade coincidem com os valores teóricos de Hinch e Renardy ([13],[15]), de  $5/9$  para as velocidades [12] e  $-1/3$  para as tensões [13], confirmando a justeza da análise desses autores e dos pressupostos invocados.

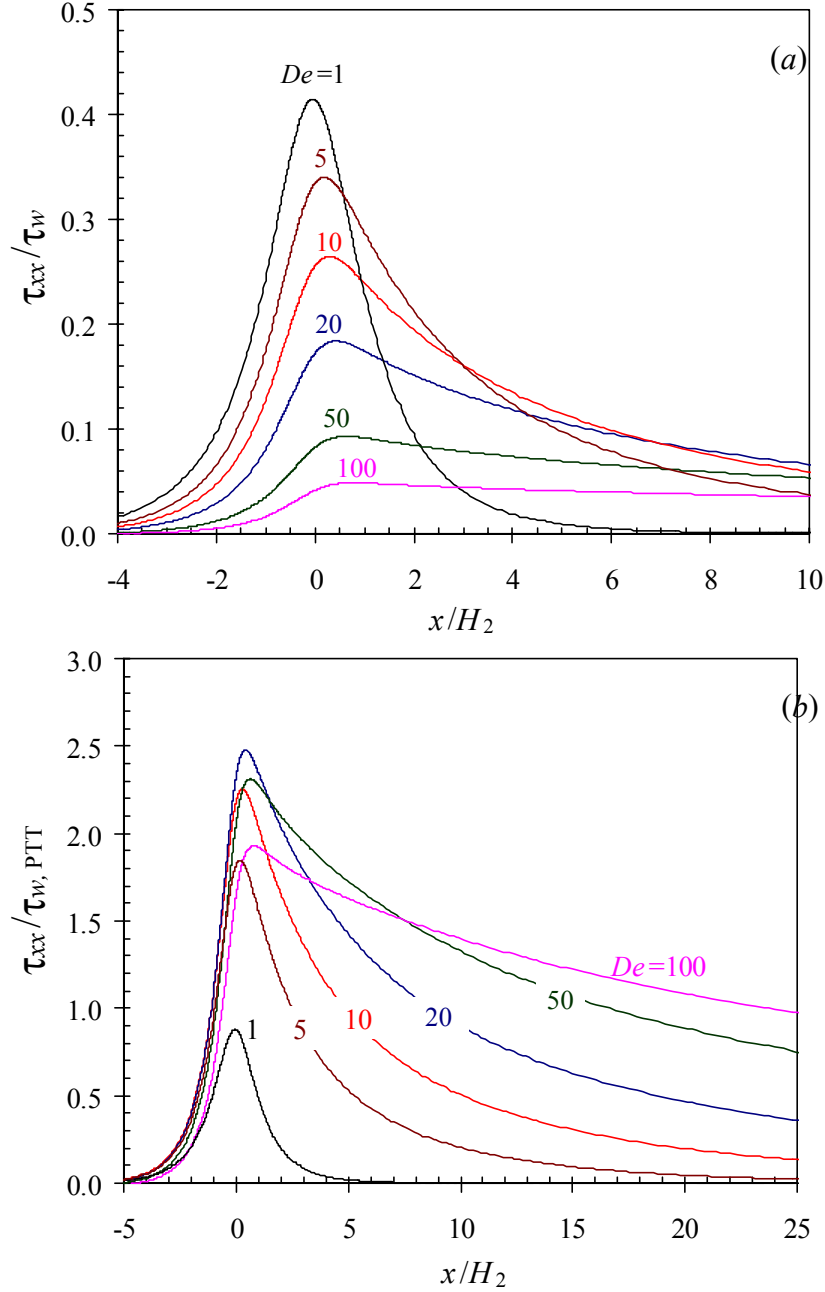


Figura 6. Perfil da tensão normal  $\tau_{xx}$  ao longo da linha média. (a) Normalização com o valor fixo  $3\eta U_2/H_2$ ; (b) normalização com o valor variável  $\tau_{w,PTT}$ .

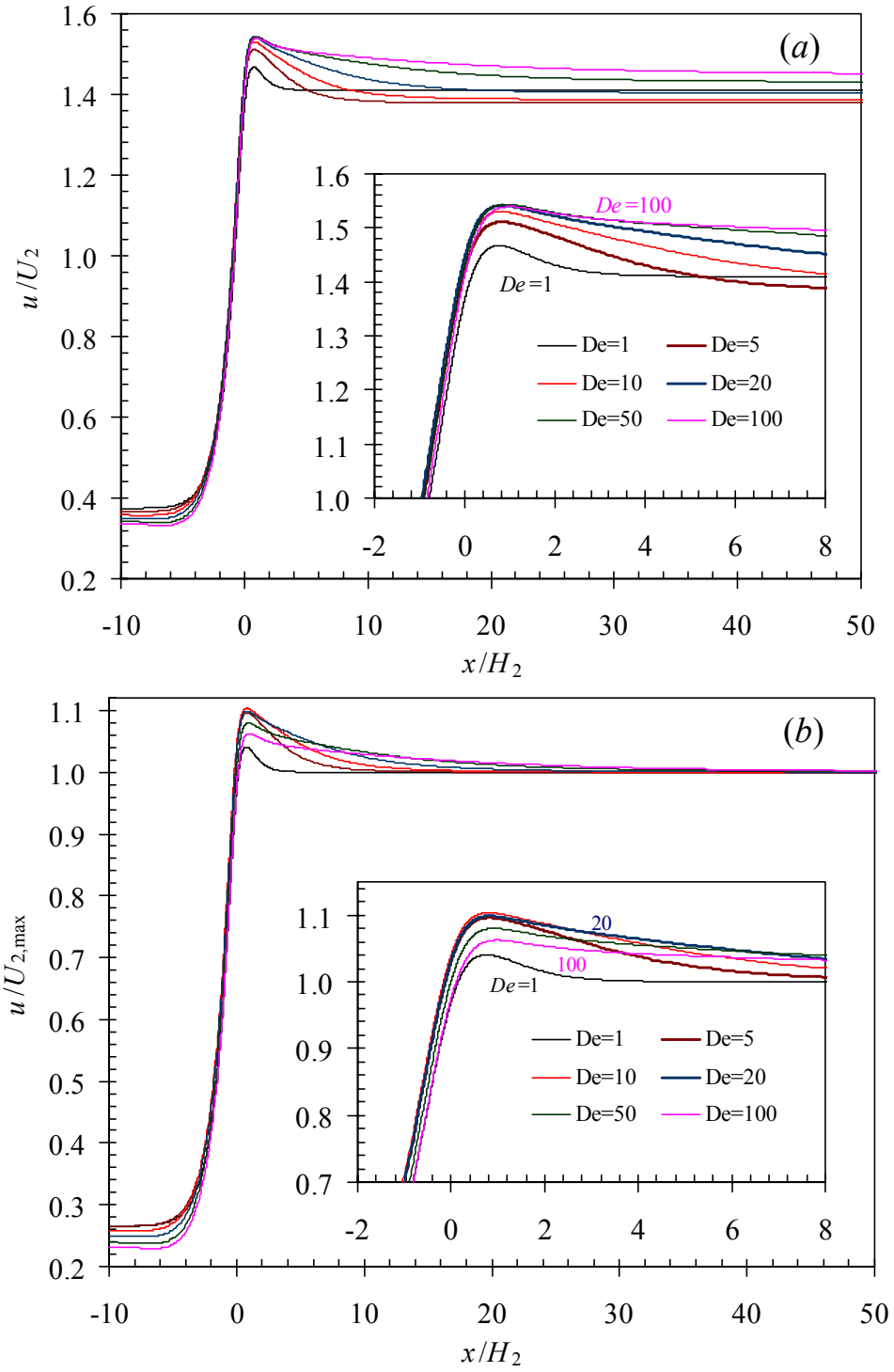


Figura 7. Perfis da velocidade axial ao longo da linha média ( $y=0$ ). (a) Normalização de  $u$  com o valor fixo  $U_2$ ; (b) normalização com o valor variável  $U_{2,max}$ .

Comparativamente a um estudo numérico semelhante, realizado por Tanner et al. [16], verifica-se melhor consistência entre os declives das variações junto ao canto aqui encontrados e as indicações dos estudos teóricos acima referidos.

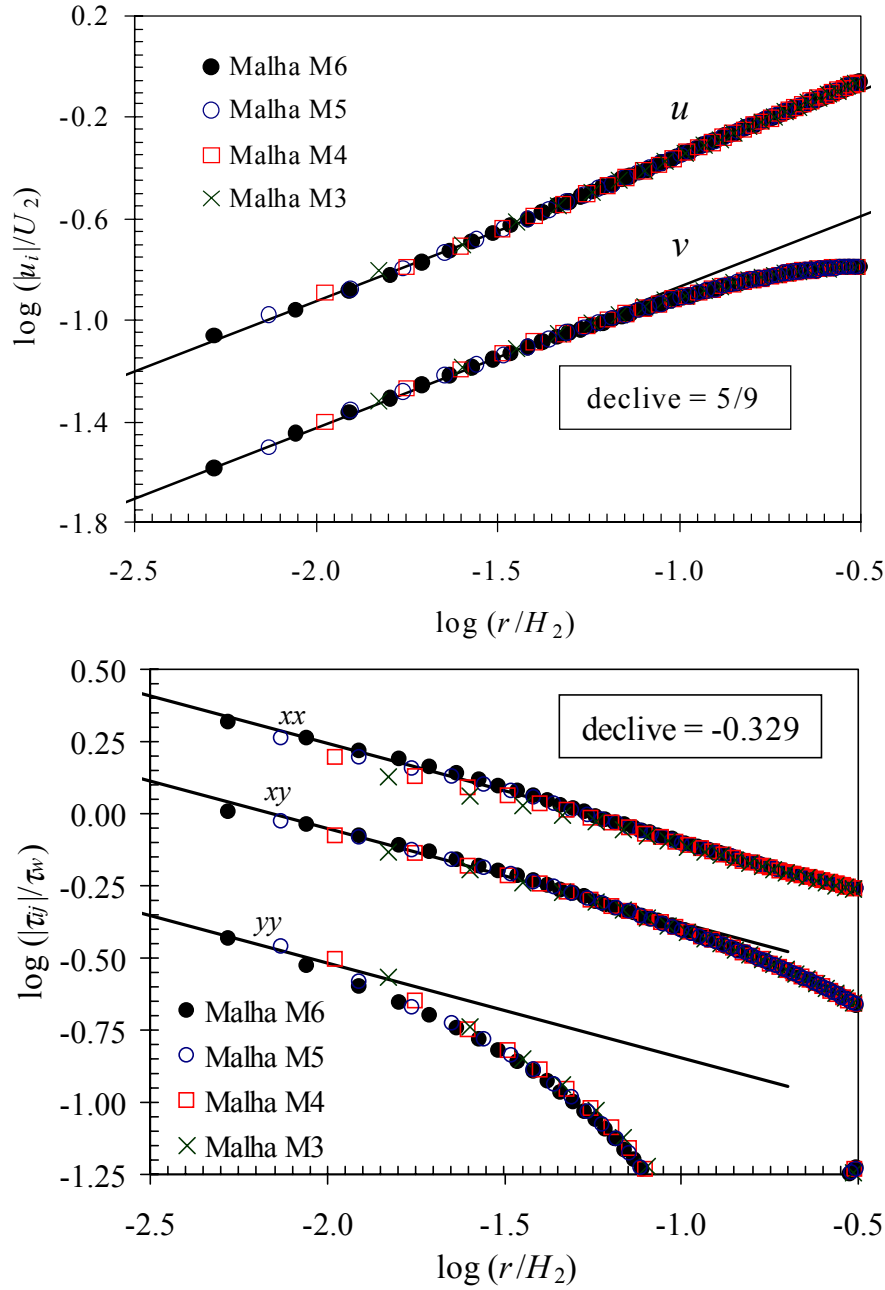


Figura 8. Comportamento assintótico junto ao canto interior a  $De=1$ . (a) velocidades; (b) tensões.

## 5. CONCLUSÕES

Foi simulado numericamente o escoamento de um fluido viscoelástico (modelo PTT) através de uma contracção plana, para valores elevados do número de Deborah. Os resultados obtidos para o comprimento e intensidade da recirculação que se forma a montante da contracção, podem ser usados como resultados de comparação por outros autores, como forma de validação. Em trabalho futuro será quantificado de forma mais precisa o grau de incerteza dos presentes resultados mas, o facto de se ter usado malhas muito refinadas e esquemas de diferenças de segunda ordem, permite desde já esperar boa precisão.

Obtiveram-se andamentos assintóticos, junto ao canto interior, com expoentes de  $-0.329$  para as tensões e  $5/9$  para as velocidades, de acordo com algumas teorias existentes.

Comparativamente com outras simulações numéricas publicadas muito recentemente na literatura especializada, observa-se que o presente método permite obter soluções para valores de elasticidade, medida pelo número de Deborah, muito superiores: vide um  $De$  máximo de 9 na Ref. [8] para 100 (ou superior) aqui.

## REFERÊNCIAS

- [1] A.G. de Castro, J.A. Covas e A.C. Diogo, *Reologia e suas aplicações industriais*, Instituto Piaget, Lisboa (2001).
- [2] N. Phan-Thien and R.I. Tanner, “A new constitutive equation derived from network theory”, *J. non-Newtonian Fluid Mech.*, **2**, 353-365 (1977).
- [3] P.J. Oliveira, F.T. Pinho and G.A. Pinto, “Numerical simulation of non-linear elastic flows with a general collocated finite-volume method”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **79**, 1-43 (1998).
- [4] P.J. Oliveira and F.T. Pinho, “Plane contraction flows of Upper Convected Maxwell and Phan-Thien–Tanner fluids as predicted by a finite-volume method”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **88**, 63-88 (1999).
- [5] M.A. Alves, F.T. Pinho and P.J. Oliveira, “Effect of a high-resolution differencing scheme on finite-volume predictions of viscoelastic flows”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **93**, 287-314 (2000).
- [6] M.A. Alves, F.T. Pinho and P.J. Oliveira, *Prediction of viscoelastic flows with a high-resolution finite-volume method*. P.M.M. Vila Real e J.J. Grácio eds., *VI Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional, Aveiro, 2000*, Vol. 2, (2000), pp. 1411-1420.
- [7] M. Aboubacar and M.F. Webster. “A cell-vertex finite volume/element method on triangles for abrupt contraction viscoelastic flows”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **98**, 83-106 (2001).
- [8] M. Aboubacar, H. Matallah and M.F. Webster. “Highly elastic solutions for Oldroyd-B and Phan-Thien/Tanner fluids with a finite volume/element method: planar contraction flows”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **103**, 65-103 (2002).
- [9] R.I. Tanner, *Engineering Rheology, Second Ed.*, Oxford University Press, Oxford,

- (2000).
- [10] L.M. Quinzani, R.C. Armstrong, R.A Brown, "Use of coupled birefringence and LDV studies of flow through a planar contraction to test constitutive equations for concentrated polymer solutions, *J. Rheol.* **39**(6), 1201-1228 (1995).
  - [11] M.A. Alves, P.J. Oliveira and F.T. Pinho, "A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, submitted.
  - [12] P.K. Khosla and S.G. Rubin, "A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme", *Computers and Fluids*, **2**, 207-209 (1974).
  - [13] E.J. Hinch, "The flow of an Oldroyd fluid around a sharp corner", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **50**, 161-171 (1993).
  - [14] M. Renardy, "A matched solution for corner flow of the upper convected Maxwell fluid", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **58**, 83-89 (1995).
  - [15] M. Renardy, "Re-entrant corner behavior of the PTT fluid", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **69**, 99-104 (1997).
  - [16] R.I. Tanner, A Jabbarzadeh and S.-C. Xue, *Computations at sharp corners*, XIIIth Int. Congress on Rheology, Cambridge, **Vol. 2**, (2000), pp. 181-183.