

ESTUDO NUMÉRICO SOBRE FORMULAÇÕES POR VOLUMES FINITOS NA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA ELASTICIDADE

Carlos J. Rente * e Paulo J. Oliveira**

* Departamento de Eng. Civil
Instituto Politécnico de Tomar
Estrada da Serra, 2300-313 Tomar, Portugal
e-mail: c.rente@ipt.pt

** Departamento de Eng. Electromecânica
Universidade da Beira Interior
6200-001 Covilhã, Portugal
e-mail: pjpo@ubi.pt

Palavras-chave: Volumes Finitos, Elasticidade Plana, Eficácia numérica.

Resumo Neste trabalho são apresentados dois tipos de formulação de volumes finitos, aqui designadas por “standard” e “implícita possível”, para a resolução das equações da elasticidade, dando-se particular atenção ao modo como são introduzidas as condições fronteira. Apresentam-se os resultados obtidos num conjunto de exemplos de teste e avalia-se a eficácia do método dos volumes finitos com malha colocada e com malha deslocada, a influência das condições fronteira e dos métodos iterativos de resolução de sistemas de equações lineares.

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos têm surgido vários trabalhos em que se utilizam métodos do tipo de volumes finitos, ao invés dos tradicionais elementos finitos tão comuns na mecânica dos sólidos, para a resolução numérica de problemas de elasticidade (por exemplo Demirdzic et al [1]).

As equações discretizadas resultantes da integração das equações diferenciais de Cauchy sobre volumes de controlo que compõem a malha computacional têm a vantagem, relativamente aos métodos de elementos finitos, de apresentarem uma estrutura bem definida (matrizes com um reduzido número de diagonais não nulas). No entanto a sua resolução com os procedimentos sequenciais comuns, em que se resolve primeiro a equação para o deslocamento segundo uma direcção e depois as equações para as restantes componentes do deslocamento, apresenta uma taxa de convergência muito baixa: são necessárias muitas iterações para resolver um problema de elasticidade linear.

Constata-se através da literatura especializada que o recurso a métodos multimalha (multigrid) é o procedimento correntemente adoptado para acelerar e controlar a taxa de convergência do processo iterativo. Estes métodos, sem dúvida eficazes, são complexos e a sua utilização em aplicações "multifísicas" (vários campos de incógnitas num determinado domínio), que pensamos abordar em trabalho futuro, pode ser problemática.

Neste estudo é feita uma avaliação das diversas variantes possíveis para implementar as equações da elasticidade plana segundo o método dos volumes finitos, de modo a encontrar-se a formulação mais adequada para este tipo de problemas. É mostrado que a eficácia do método depende de factores como: implementação das condições fronteira (Dirichlet - deslocamentos impostos; Neumann - tracções impostas; ou de simetria); tipo de malha ("colocada" ou "deslocada"); existência de incógnitas sobre as fronteiras.

2. FORMULAÇÃO GERAL EM VOLUMES FINITOS DA EQUAÇÃO DA ELASTICIDADE

É apresentada a formulação geral para as equações de conservação da quantidade de movimento de um meio contínuo elástico, em regime estacionário e sem forças volúmicas.

2.1. Equações de governo

A equação diferencial que representa o balanço estático de forças é:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

onde τ_{ij} são as componentes cartesianas do tensor das tensões e a regra da soma para índices repetidos se aplica. Para um meio linear elástico, as tensões são dadas pela lei de Hooke generalizada:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (2)$$

em que u_i são as componentes dos deslocamentos, e μ e λ são os dois coeficientes de Lamé, que podem ser relacionados com os habituais módulo de Young E e razão de Poisson ν por:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\text{ou } \lambda = \frac{\nu E}{(1-\kappa^2)} \quad (\text{estado plano de tensão}) \quad (3)$$

2.2. Discretização - Geral

Usando o operador $\partial/\partial x_j \rightarrow (1/V)B_{lj}\partial/\partial \xi_l$ é possível passar directamente das equações diferenciais para as equações discretizadas em malha genericamente não ortogonal [2], onde V irá representar um volume e B_{lj} a componente j duma área alinhada com a direcção l .

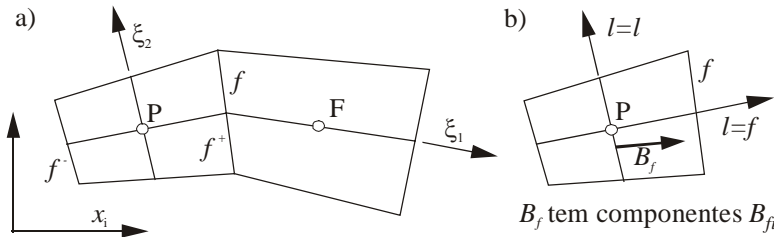


Figura 1. a) Volume de controlo genérico P e vizinho F. b) Direcções e componentes de área

Para a utilização correcta deste formalismo é essencial distinguir a noção de “direcção”, segundo uma coordenada generalizada ξ_l , da noção de índice de “componente”, relativamente ao eixo cartesiano de referência. Por isso as direcções irão ser indicadas com índices l, m ou f (f é também usado para indicar uma face de um volume de controlo), e as componentes cartesianas com i, j ou k . As tensões escrevem-se:

$$V\tau_{ij} = \mu \left(B_{lj} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_l} + B_{li} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_l} \right) + \lambda B_{lk} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} \delta_{ij} \quad (4)$$

e a componente i da força que actua numa face f fica ($t_i = \tau_{ij}n_j$ e $T_{fi} = B_{fj}t_i = \tau_{ij}B_{fj}$):

$$VT_{fi} = V(\tau_{ij})_f B_{fj} = \mu \left(B_{fj}B_{lj} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_l} + B_{fj}B_{li} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_l} \right) + \lambda B_{fj}B_{lk} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} \delta_{ij} \quad (5)$$

(faz-se notar que não existe regra da soma para o índice f). Nesta expressão as derivadas

$\partial u / \partial \xi_l$ representam diferenças de u calculadas ao longo da direcção l e são avaliadas na face f do volume de controlo. Como $B_{fi} = B_f n_j$, onde $B_f \equiv B_{fi} B_{fi}$ é a área escalar da face do volume de controlo e n_j a normal unitária a essa face, o último termo da expressão anterior pode simplificar-se:

$$V_f T_{fi} = V_f (\tau_{ij})_f B_{fi} = \mu_f \left(B_{fi} B_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_l} + B_{fi} B_{li} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_l} \right) + \lambda_f B_{fi} B_{lk} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} \quad (6)$$

A equação do balanço de forças discretizada, para a componente cartesiana i pode escrever-se como:

$$\sum_{f=1}^6 T_{fi} = 0 = T_{e,i} - T_{w,i} + T_{n,i} - T_{s,i} + T_{t,i} - T_{b,i} \quad (7)$$

onde se utiliza uma notação de “compasso”: norte, sul, este, oeste, topo e base.

2.3. Discretização – Formulação Standard

A formulação “standard” das equações discretizadas corresponde a tratar de forma implícita o primeiro termo da Eq. (6) com $l = f$, ficando a força na face:

$$T_{fi} = D_f (u_{iF} - u_{iP}) + SU_{fi} \quad (\text{com: } D_f \equiv \frac{\mu_f B_f^2}{V_f}) \quad (8)$$

O termo fonte SU_i , para qualquer face, contém todos os restantes termos da Eq. (6):

$$SU_{fi} = \frac{\mu_f}{V_f} \left(B_{fi} B_{l'j} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_{l'}} + B_{fi} B_{li} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_{l'}} \right) + \frac{\lambda_f}{V_f} B_{fi} B_{lk} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_{l'}} \quad (9)$$

onde um índice de direcção com pelica (l') indica somatório para $l \neq f$.

Com esta formulação “standard” a equação discretizada fica:

$$a_P u_{iP} = \sum_{F=1}^6 a_{iF} u_{iF} + SU_i \quad (10)$$

com coeficientes:

$$a_F = D_f, \quad a_P = \sum_{F=1}^6 a_F + SP \quad (11)$$

onde SP serve para implementar condições fronteira e formulações especiais (ver adiante), e termo fonte:

$$SU_i = \sum_{f=1}^6 SU_{fi} \quad (12)$$

onde SU_{fi} , a componente i do termo fonte na face f , é obtido da Eq. (9).

De notar que com esta formulação os coeficientes são iguais para as três componentes do deslocamento (numa malha colocada); isto é evidente pelo facto das expressões (Eq.11) não dependerem do índice i . Esta formulação tem o inconveniente de necessitar de factores de subrelaxação pequenos ($\omega \approx 0.5$), dado o tratamento dos deslocamentos ser pouco implícito. A expressão duma força na face do volume de controlo pode escrever-se do seguinte modo:

$$T_{fi} = \underbrace{D_f(u_{iF} - u_{iP})}_{\text{implicito}} + \underbrace{SU_{fi}}_{\text{explicito}} \quad (13)$$

com indicação do tipo de tratamento (implícito ou explícito) para cada termo.

2.4. Discretização - Formulação Implícita Possível

Uma alternativa à formulação anterior é tornar a equação para cada deslocamento o mais implícita possível, o que se consegue agrupando todos os termos proporcionais à diferença de deslocamentos através da face do volume de controlo em questão. Relativamente à Eq. (6), do primeiro termo que multiplica μ a parte implícita corresponde a $l = f$; no segundo termo a parte implícita corresponde a $l = f$ e $j = i$; finalmente, no último termo que multiplica λ podemos extrair uma parte implícita com $l = f$ e $k = i$.

Assim, a equação (6) fica:

$$\begin{aligned} VT_{fi} = & \left\{ \mu B_{\underline{fj}} B_{\underline{fi}} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_f} \right\} + \mu B_{\underline{fj}} B_{l'i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_{l'}} \\ & + \left\{ \mu B_{\underline{fj}} B_{\underline{fi}} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_f} \right\} + \mu B_{\underline{fj}} B_{l'i} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_{l'}} + \mu B_{\underline{fj}'} B_{\underline{fi}} \frac{\partial u_{j'}}{\partial \xi_f} \\ & + \left\{ \lambda B_{\underline{fj}} B_{\underline{fi}} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_f} \right\} + \lambda B_{\underline{fj}} B_{fk'} \frac{\partial u_{k'}}{\partial \xi_f} + \lambda B_{\underline{fj}} B_{l'k} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_{l'}} \end{aligned} \quad (14)$$

onde os termos que vão ser tratados de forma implícita estão escritos à esquerda, dentro de chavetas. Índices sublinhados *não* são somados e j' ou k' indica $j \neq i$ ou $k \neq i$. Agrupando esses termos, a Eq. (14) pode escrever-se:

$$T_{fi} = D_f \underbrace{\left[1 + \frac{B_{\underline{fj}}^2}{B_f^2} (1 + fac) \right]}_{\text{implicito}} (u_{iF} - u_{iP}) + \underbrace{SU_{fi} - D_f \frac{B_{\underline{fj}}^2}{B_f^2} (1 + fac) (u_{iF}^* - u_{iP}^*)}_{\text{explicito}} \quad (15)$$

com $fac \equiv \frac{\lambda}{\mu}$.

O asterisco, u_i^* , designa valores da iteração anterior (valores existentes “em memória”). Quando o processo iterativo converge, os deslocamentos u_i e u_i^* coincidem e a força dada pela Eq. (15) torna-se igual à da Eq. (13).

É mais fácil implementar a formulação “implícita possível” seguindo a Eq. (15) (em que o termo que multiplica B_{fi}^2 é somado e subtraído) do que estar a modificar o termo fonte como indicado pela Eq. (14). O coeficiente da equação discretizada fica:

$$a_F^{u_i} = D_f \left[1 + \frac{B_{fi}^2}{B_f^2} (1 + fac) \right] \quad (16)$$

É notório que agora os coeficientes dependem do índice cartesiano i , ou seja, irá existir um conjunto de coeficientes diferente para cada componente, pelo que não é satisfeito o princípio de invariância relativamente a rotações do sistema de eixos de referência

2.5. Condições Fronteira

Serão aqui considerados os tipos de fronteira usuais: planos de simetria, deslocamentos impostos na fronteira – Dirichlet e forças impostas na fronteira – Neumann. A abordagem será feita somente para a formulação implícita possível, por ser a que se adoptou neste trabalho para os problemas de elasticidade plana analisados.

2.5.1 Planos de simetria

A expressão para a força que actua numa face de um volume de controlo situada sobre um plano de simetria é igual à anterior (Eq.15). Nessa expressão, os valores das componentes do deslocamento no volume de controlo fora do domínio (designado por F , enquanto P é o volume de controlo interno adjacente à fronteira) são obtidas por leis de reflexão. Essas leis resumem-se a:

$$u_{ni,F} = -u_{ni,P} \quad \text{e} \quad u_{ti,F} = u_{ti,P} \quad (17)$$

para as componentes normais (índice n) e tangenciais (índice t) ao plano da fronteira. Relembra-se que, tanto os deslocamentos como as forças se podem separar em componentes normais e tangenciais:

$$u_i = u_{ti} + u_{ni} \quad \text{com:} \quad u_{ni} = u_n n_i = (u_j n_j) n_i \quad (18)$$

Num plano de simetria as forças tangenciais são nulas $T_{ti} = 0$, pelo que:

$$T_{fi} = T_{ni} + T_{ti} = T_{ni} = T_n n_i = (T_{ff} n_j) n_i \quad (19)$$

A expressão geral para a força na face f é dada pela Eq. (6) de forma que a componente “normal”, obtida por multiplicação por n_i , vem:

$$\begin{aligned}
 V_f T_{nf} &= \mu_f \left(B_{ff} B_{lj} \frac{\partial u_n}{\partial \xi_l} + B_f B_{li} \frac{\partial u_n}{\partial \xi_l} n_i \right) + \lambda_f B_f B_{lk} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} = \\
 &= (2\mu_f + \lambda_f) B_f^2 \frac{\partial u_n}{\partial \xi_f} + \lambda_f B_f B_{l'k} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_{l'}} = \\
 &= 2\mu_f B_f^2 \frac{\partial u_n}{\partial \xi_f} + \lambda_f B_f B_{fk} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_f} + \lambda_f B_f B_{l'k} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_{l'}}
 \end{aligned} \tag{20}$$

onde se usaram as identidades $u_n = u_i n_i$ e $B_{jk} u_k = B_f u_n$, e a condição fronteira para a componente normal do deslocamento:

$$u_n = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_n}{\partial \xi_{l'}} = 0 \quad (\text{sobre a fronteira } f). \tag{21}$$

A componente i da força que actua na face fronteira f é então obtida de:

$$T_{fi} = (T_n n_i)_f = \frac{1}{V_f} (2\mu_f + \lambda_f) B_f^2 \frac{\partial u_{n_i}}{\partial \xi_f} + \frac{1}{V_f} \lambda_f B_{ff} B_{l'k} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_{l'}} \tag{22}$$

O primeiro termo corresponde a contribuições “normais” (alinhadas com a direcção f) ao plano da face, e é susceptível de tratamento implícito. O segundo termo corresponde às variações cruzadas, contendo diferenças de deslocamentos calculadas sobre o plano da face, e é sempre tratado de forma explícita.

O primeiro termo pode ser tratado de duas formas:

(i) Passa-se da componente normal do deslocamento, para o deslocamento propriamente dito:

$$\frac{1}{V_f} (2\mu_f + \lambda_f) B_f^2 \frac{\partial u_{n_i}}{\partial \xi_f} = D_f (2 + fac) \frac{\partial u_{n_i}}{\partial \xi_f} = D_f (2 + fac) \frac{\partial u_i}{\partial \xi_f} \tag{23}$$

com $D_f \equiv \mu_f B_f^2 / V_f$ e uma vez que $\partial u_{n_i} / \partial \xi_f = 0$ por razões de simetria. Este tratamento resulta em:

$$D_f (2 + fac) \frac{\partial u_i}{\partial \xi_f} = SP(u_{iF} - u_{iP}) = \underbrace{SP.u_{iF}}_{\text{explicito}} - \underbrace{SP.u_{iP}}_{\text{implicito}} \tag{24}$$

e portanto fornece um SP (ver Eq. 11) não nulo para todas as componentes do deslocamento junto a um plano de simetria. Isto vai fazer com que a taxa de convergência seja reduzida de forma significativa.

(ii) Nesta segunda alternativa continua-se a trabalhar com a componente normal do deslocamento:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_f}(2\mu_f + \lambda_f)B_f^2 \frac{\partial u_{n_i}}{\partial \xi_f} &= D_f(2 + fac) \frac{\partial u_{n_i}}{\partial \xi_f} = D_f(2 + fac)(u_{n_i}^F - u_{n_i}^P) = \\ &= -\underbrace{2D_f(2 + fac)u_{n_i}^P}_{a_f} = -a_f n_j n_i u_j^P \end{aligned} \quad (25)$$

onde se usou o facto $u_{n_i}^f = 0$ (condição de simetria) e a localização dos deslocamentos é dada como índice superior para evitar confusão. A separação entre parte implícita e explícita é feita agora da seguinte forma:

$$-a_f n_j n_i u_j^P = -\underbrace{a_f n_i n_i u_i^P}_{\text{implicito}} - \underbrace{a_f n_j n_i u_j^P}_{\text{explicito}} \quad (26)$$

ou

$$-a_f n_j n_i u_j^P = -SP_i u_i^P + SU_i i \quad (27)$$

com

$$SP_i = a_f n_i n_i \quad (28)$$

e

$$SU_i = -a_f n_j n_i u_j^P \quad (29)$$

Esta formulação é mais eficiente do que a anterior, e generaliza completamente os procedimentos usados em malha cartesiana.

2.5.2 Deslocamentos prescritos

Numa fronteira em que os deslocamentos são prescritos (condição fronteira de Dirichlet) a expressão para a força na face é dada por:

$$T_{f_i} = \underbrace{\left\{ SU_{f_i} - D_f \frac{B_{f_i}^2}{B_f^2} (1 + fac)(u_{iF}^* - u_{iP}^*) \right\}}_{\text{explicito(sempre)}} + \underbrace{D_f \left[1 + \frac{B_{f_i}^2}{B_f^2} (1 + fac) \right]}_{\text{explicito}} \underbrace{(u_{iF}^* - u_{iP}^*)}_{\text{implicito}} \quad (30)$$

A primeira parte do termo explícito, entre chavetas, é descontada dos termos fonte, e não é indicada de seguida. A parte implícita vai para o coeficiente central (a_p) através do SP:

$$SU_{f_i} = SU_{f_i} + D_f \left[1 + \frac{B_{f_i}^2}{B_f^2} (1 + fac) \right] u_{iF}^* \quad (31)$$

$$SP_f = SP_f + D_f \left[1 + \frac{B_{f_i}^2}{B_f^2} (1 + fac) \right] \quad (32)$$

2.5.3 Forças prescritas

Numa fronteira em que as forças sejam prescritas (condição fronteira de Neumann) basta simplesmente igualar o termo fonte ao valor da força dada:

$$SU_{fi} = T_{fi} \quad (33)$$

e não fazer intervir mais nenhuma contribuição associada a essa face da fronteira na equação de equilíbrio de forças. Os deslocamentos dos nós da fronteira, não considerados nas equações de equilíbrio, podem ser obtidos a partir da expressão da força que actua na face (Eq.15):

$$u_{iF} = u_{iP} + \frac{T_{fi} - SU_{fi} + D_f \frac{B_{fi}^2}{B_f^2} (1 + fac)(u_{iF}^* - u_{iP}^*)}{D_f \left[1 + \frac{B_{fi}^2}{B_f^2} (1 + fac) \right]} \quad (34)$$

3. MALHAS COLOCADAS E DESLOCADAS

O arranjo das variáveis numa malha de volumes finitos pode ser estabelecido no mesmo conjunto de pontos da malha e utilizar os mesmos volumes de controlo para as diferentes variáveis. Este tipo de arranjo designa-se por *colocado* e está esquematizado na Figura 2 a).

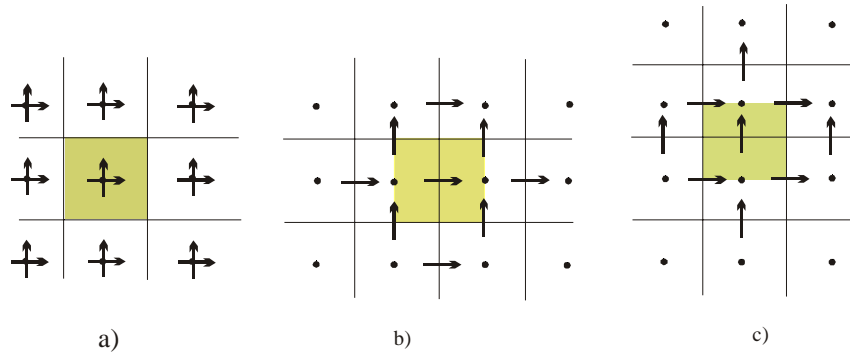


Figura 2. Arranjos de variáveis. a) malha colocada. b) e c) malha deslocada – equação para u e v , respectivamente.

Nesta distribuição colocada de variáveis e volumes de controlo os termos das equações que contêm coeficientes são tratados de forma implícita e representam interações com os vizinhos directos (situados do outro lado da face de um volume de controlo). Os termos explícitos podem ser tratados recorrendo à avaliação dos gradientes $\partial u_i / \partial x_j$ nos centros dos volumes de controlo, sendo depois interpolados para as faces dos volumes de controlo. A alternativa que se apresenta neste trabalho utiliza a interpolação directa dos deslocamentos (dos nós centrais para os centros das arestas dos volumes de controlo), em vez de interpolação

dos gradientes.

O arranjo *deslocado* de variáveis corresponde, no caso bidimensional, às situações representadas na Figura 2. b) e c) em que se estabelece uma malha e respectiva distribuição espacial de volumes de controlo para cada variável. Os termos que requerem interpolação com o esquema colocado podem agora ser obtidos sem interpolação, o que constitui a principal vantagem deste tipo de arranjo. Faz-se notar que este arranjo das variáveis na malha é comum em problemas de mecânica dos fluidos mas, aparentemente, não foi testado em problemas de elasticidade.

No caso das malhas deslocadas e para fronteiras com forças impostas optou-se por incluir como incógnitas os deslocamentos na fronteira, contrariamente ao procedimento utilizado para malhas colocadas em que recorre à Eq. 34 para a avaliação desses deslocamentos. Este procedimento melhora a eficácia numérica do método para malhas deslocadas.

4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Apresentam-se alguns exemplos de aplicação das formulações pelo método dos volumes finitos correspondentes a problemas de elasticidade plana. As propriedades materiais escolhidas para estes exemplos foram: módulo de Young $E = 200$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$. Todas as aplicações foram estudadas com malhas colocadas e deslocadas de 400, 1600, 6400 e 25600 volumes de controlo.

Os exemplos foram escolhidos pela sua simplicidade e de modo a permitir uma correcta avaliação e comparação da resposta das diferentes formulações, particularmente no que se refere às condições fronteira. Assim, os exemplos tratados em 4.1, 4.2 e 4.3 têm por domínio uma placa quadrada de lado unitário submetida, respectivamente, a condições fronteira do tipo Dirichlet, Neumann e Neumann com planos de simetria. Os dois primeiros exemplos são *patch tests* [3] utilizados para verificar a convergência de elementos finitos não conformes. O exemplo que se apresenta em 4.4 é o de uma viga em consola com tensão tangencial parabólica na extremidade livre e foi escolhido por conter uma mistura das condições fronteira do tipo Dirichlet e Neumann e induzir campos de deslocamento e de tensão mais complexos em todo o domínio que os casos mais simples correspondentes aos outros exemplos.

Para a avaliação da eficácia numérica das formulações procedeu-se à determinação do erro global relativo da solução completamente convergida, dado por:

$$\frac{\|u - u^h\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\left(\int_{\Omega} (u_i - u_i^h)(u_i - u_i^h) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{\Omega} (u_i)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (35)$$

em que u e u^h são as soluções analítica e numérica do deslocamento, respectivamente, e utilizaram-se os seguintes métodos iterativos para a resolução das equações algébricas: CGS (gradientes conjugados simétrico com decomposição incompleta de Cholesky), CGSSIP (gradientes conjugados simétrico pré-condicionado com procedimento implícito de Stone) e MCGS (gradientes conjugados simétrico com decomposição incompleta de Cholesky).

modificada). Para a comparação entre os vários métodos iterativos utilizou-se uma tolerância de 10^{-4} .

4.1 Placa quadrada com condições fronteira Dirichlet

Neste exemplo é imposto um campo de deslocamentos linear na fronteira Γ_u de todo o domínio. Os deslocamentos obtidos com as formulações com malha deslocada e malha colocada condizem com os resultados analíticos. O erro global relativo (ver Figura 5), que se situa em cerca de 10^{-13} e 10^{-12} , respectivamente para as malhas deslocada e colocada, verifica-se apenas nos volumes de controlo que deveriam ter deslocamento nulo.

4.2 Placa quadrada com condições fronteira Neumann

Trata-se de uma placa submetida a tracção uniaxial de valor unitário (estado plano de tensão), conforme representado na Figura 3. A solução analítica para o vector deslocamento é dada por:

$$u_1 = \frac{x_1}{E}, \quad u_2 = -\frac{\nu x_2}{E} \quad (36)$$

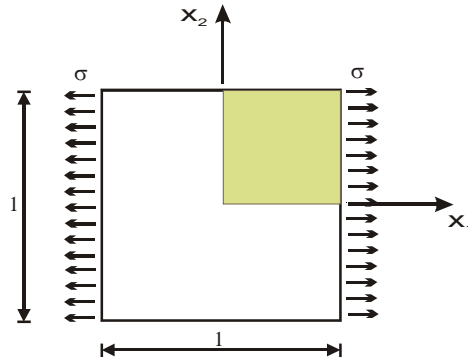


Figura 3. Placa quadrada submetida a tracção uniaxial. Geometria e carregamento

De modo a impedir o movimento de corpo rígido da placa foram introduzidas restrições ao deslocamento a meio de cada lado do quadrado ($u=0$ para $x_2 = \pm 0.5$ e $v=0$ para $x_1 = \pm 0.5$). Os deslocamentos obtidos com as formulações com malha deslocada e malha colocada condizem com os resultados analíticos. O erro global relativo (ver Figura 5), que se situa em cerca de 10^{-6} e 10^{-5} , respectivamente para as malhas deslocada e colocada, verifica-se apenas nos volumes de controlo que deveriam ter deslocamento nulo, tal como no caso anterior.

4.3 Placa quadrada com condições fronteira Neumann e simetria

Exemplo semelhante ao anterior, mas em que se aproveita a dupla simetria do problema. O domínio considerado na análise corresponde ao indicado com preenchimento na Figura 3. Foi

apenas estudada a resposta numérica com malha colocada, verificando-se que o erro global relativo (ver Figura 5) da solução se situa entre os valores correspondentes ao exemplo anterior para malha deslocada e colocada, reflectindo-se aqui a maior precisão que se obtém quando os deslocamentos normais à fronteira são impostos – caso dos planos de simetria, relativamente à solução por malha colocada descrita no caso anterior.

4.4 Viga em consola com tensão tangencial parabólica na extremidade livre

Trata-se de uma viga em consola, conforme representado na Figura 4, de comprimento L , altura D e largura unitária, submetida a um carregamento de distribuição parabólica na extremidade livre, e para a qual se assume o estado plano de tensão.

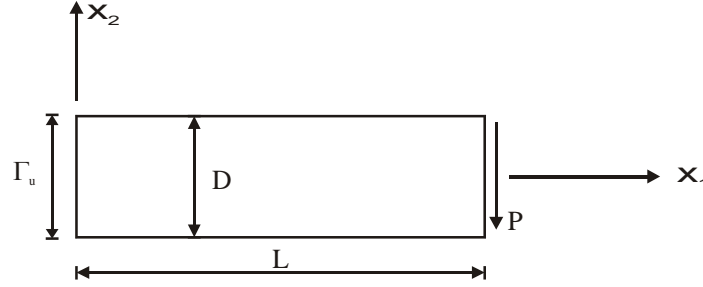


Figura 4. Viga em consola. Geometria e carregamento

A solução analítica para o vector deslocamento é dada por [4]:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-Px_2}{6EI} \left[(6L - 3x_1)x_1 + (2 + \nu)x_2^2 - \frac{3D^2}{2}(1 + \nu) \right] \\ u_2 &= \frac{P}{6EI} \left[3\nu x_2^2 (L - x_1) + (3L - x_1)x_1^2 \right] \end{aligned} \quad (37)$$

enquanto as tensões são dadas por:

$$\sigma_{11} = \frac{-P(L - x_1)x_2}{I}, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = \frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (38)$$

em que I é o momento de inércia, que no caso de uma viga de secção transversal rectangular e largura unitária é dado por:

$$I = \frac{D^3}{12} \quad (39)$$

No modelo numérico, a solução analítica para o deslocamento dada pela Eq. 37 foi prescrita na fronteira Γ_u (ver Figura 4.):

$$x_1 = 0, \quad -D/2 \leq x_2 \leq D/2 \quad (40)$$

enquanto nas restantes fronteiras foram prescritas as tensões exactas dadas pela Eq. 38.

Consideraram-se os seguintes parâmetros na análise numérica: $P = 20$ kPa, $D = 1$ e $L = 4$.

Conforme se pode verificar no gráfico da Figura 5, o erro global relativo da solução é substancialmente mais elevado que nos casos anteriores, situando-se agora em cerca de 10^{-2} e 10^{-3} , respectivamente para as malhas deslocada e colocada. Verifica-se que neste exemplo a precisão obtida com a malha colocada é superior, contrariamente ao que se havia observado nos exemplos mais simples apresentados anteriormente.

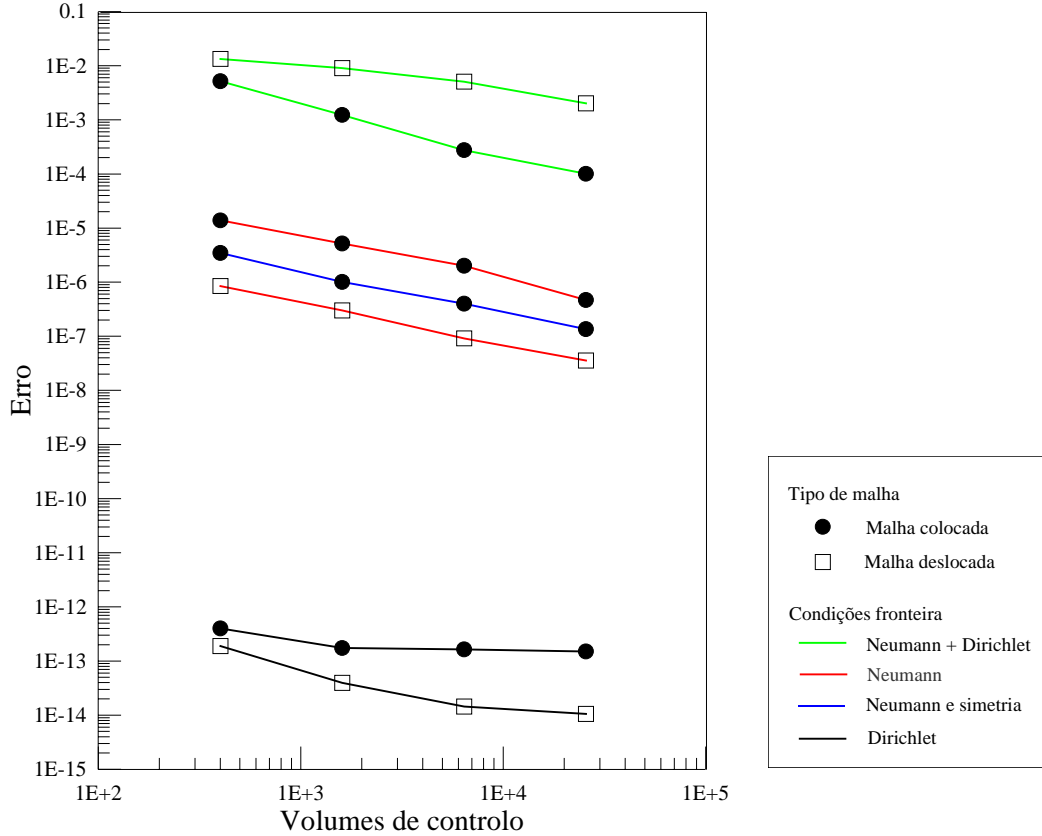


Figura 5. Erro global relativo das soluções numéricas

4.5 Comparação entre métodos iterativos

A avaliação do desempenho dos métodos iterativos na resolução das equações algébricas que resultam das formulações adoptadas foi feita através do número de iterações interiores, inerentes ao processo iterativo e assim designadas para as distinguir das iterações exteriores, resultantes do procedimento sequencial de resolução das equações desacopladas e que normalmente não dependem do número de volumes de controlo. A tolerância considerada para a interrupção do processo iterativo foi de 10^{-4} e apenas foram considerados os exemplos mais simples: placa quadrada com condições fronteira Dirichlet e placa quadrada com condições fronteira Neumann.

Os gráficos das Figuras 6, 7 e 8 indicam o número de iterações interiores em função do

número de volumes de controlo para cada exemplo. Constata-se que a tendência, para todos os métodos iterativos estudados, é a de menor número de iterações no caso da malha colocada para o exemplo com condições fronteira Dirichlet e menor número de iterações no caso da malha deslocada para o exemplo com condições fronteira Neumann. Verifica-se, como seria de esperar, maior numero de iterações no caso de fronteiras Neumann, dada o carácter mais explícito do tratamento deste tipo de condições fronteira em ambas as formulações. Regista-se ainda que o método iterativo CGSSIP apresenta um número de iterações mais elevado que os outros dois métodos no caso do exemplo com fronteiras Neumann e que, do ponto de vista global, o método MCGS é aquele que permite obter resultados mais satisfatórios em ambos os exemplos.

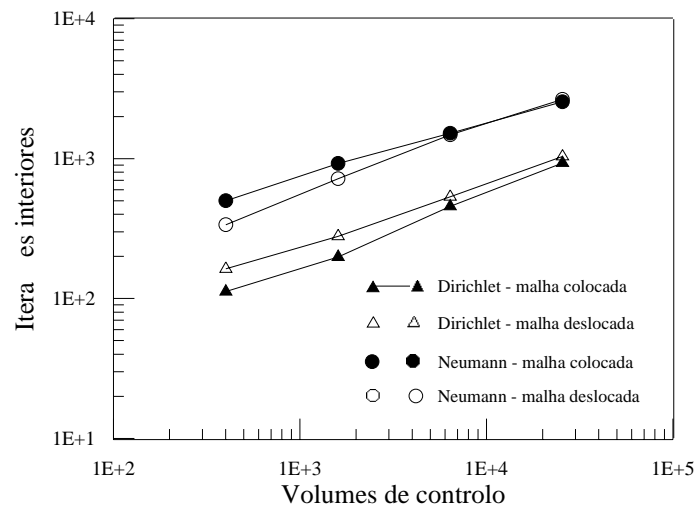


Figura 6. Método iterativo CGS. Comparação de resultados

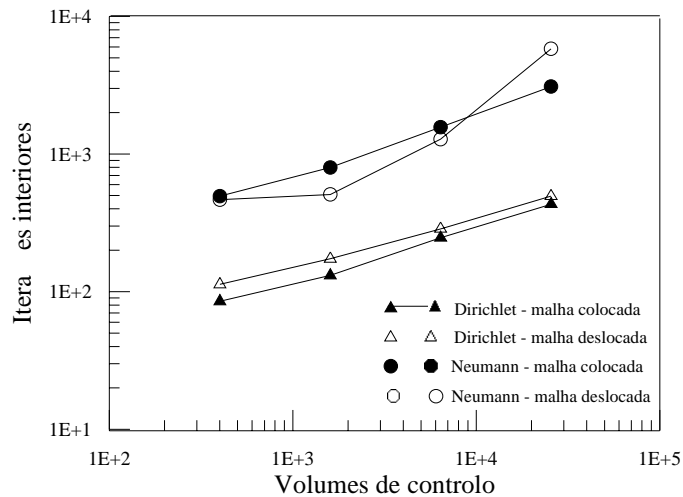


Figura 7. Método iterativo CGSSIP. Comparação de resultados

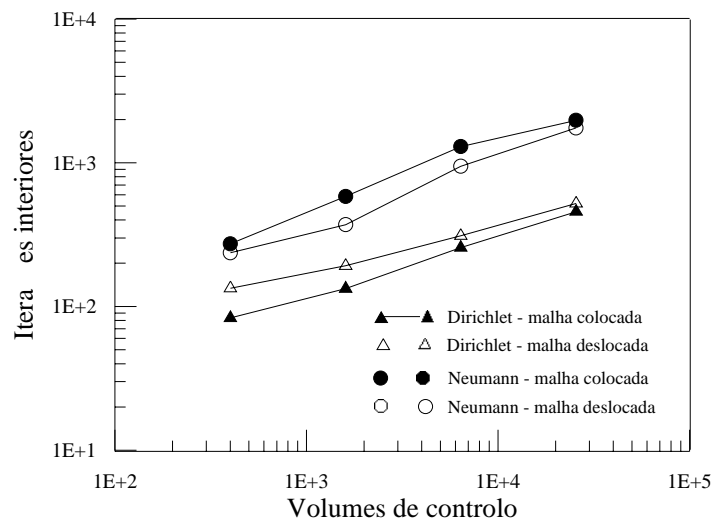


Figura 8. Método MCGS. Comparação de resultados

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi feita a avaliação de alguns factores que afectam a eficácia numérica do método dos volumes finitos na resolução de problemas de elasticidade. De uma forma global e face aos resultados apresentados em 4. verifica-se que o esquema com malhas deslocadas se comporta bem em termos de precisão nos exemplos mais simples, mas apresenta precisão inferior ao esquema com malhas colocadas no exemplo mais complexo. Relativamente ao método iterativo, conclui-se que o que apresenta melhor desempenho global, é o método dos gradientes conjugados com decomposição incompleta de Cholesky modificada.

REFERÊNCIAS

- [1] Demirdzic, I, Muzaferija, S and Peric, M, *Advances in Computation of Heat Transfer, Fluid Flow and Solid Body Deformation Using Finite Volume Approaches*, in *Advances in Numerical Heat Transfer*, Minkowycz, WJ and Sparrow, EM editors (1997)
- [2] C.J.Rente e P.J.Oliveira, *Application of a finite volume method to solid stress analysis with non-linear elasto-plastic effects*, Proc. Conferência Engenharia'2001 – Inovação e Desenvolvimento, 269-274, UBI, Covilhã, Portugal (2001).
- [3] B.M.Irons e A.Razzaque, *Experience with the patch test for convergence of finite elements*, in A.K. Aziz (ed.), *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*, Academic Press, New York (1972).
- [4] S.P.Timoshenko e J.N.Goodier, *Theory of elasticity*, 3rd Edition McGraw Hill, New York (1970)