



**UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR**

## **SOLUÇÕES ANALÍTICAS EM MECÂNICA DE FLUIDOS**

**Paulo Jorge dos Santos Pimentel de Oliveira**

**LIÇÃO SÍNTESE PARA PROVAS DE AGREGAÇÃO**

Departamento de Engenharia Electromecânica  
Universidade da Beira Interior  
(Agosto 2000)

## Índice

1. Introdução.....	1
1.1 Interesse.....	1
1.2 Análises simples e complexas.....	2
1.3 Soluções analíticas e semi-analíticas.....	2
1.4 Problemas de escoamentos em condutas ou tubos.....	2
2. Solução em canal e tubo para fluidos Newtonianos e não-Newtonianos generalizados.....	3
2.1 Fluido Newtoniano (escoamento de Poiseuille).....	3
2.2 Fluido tipo “Lei-de-potência”.....	7
3. Solução em canal e tubo para fluido viscoelástico.....	10
3.1 Modelo reológico.....	10
3.2 Equações simplificadas.....	11
3.3 Resolução para fluido PTT-linear.....	13
3.3.1 Canal plano.....	13
3.3.2 Tubo de secção circular.....	14
3.3.3 Algumas variações representativas.....	15
3.4 Resolução para fluido PTT-exponencial.....	17
4. Solução de escoamento axial ao longo dum espaço anular.....	19
4.1 Introdução.....	19
4.2 Equações de partida.....	19
4.3 Dedução.....	20
4.4 Resultados.....	22
4.5 Resultados integrais.....	23
5. Um caso com transferência de calor (convecção forçada em tubo) .....	25
5.1 Definição do problema e hipóteses simplificativas.....	25
5.2 Equações de partida.....	25
5.3 Dedução.....	26
5.4 Alguns Resultados.....	28
6. Resumo e comentários finais.....	30
Agradecimentos.....	31
Bibliografia e referências.....	31

## 1. INTRODUÇÃO

Estas notas constituem uma lição síntese a ser apresentada em provas de agregação em Engenharia Mecânica e seriam adequadas dentro duma disciplina de Mecânica dos Fluidos a nível do Mestrado. A matéria aqui tratada é porventura demasiado extensa para uma aula de 1 hora se forem apresentados todos os detalhes das deduções teóricas envolvidas mas, de forma condensada, consegue-se nesse tempo fazer uma apresentação minimamente elucidativa e que contenha todos os elementos necessários à sua compreensão.

O tema da lição é o das soluções analíticas em problemas de mecânica de fluidos, sendo apresentadas algumas conhecidas, e outras menos conhecidas, para escoamentos particulares, concretamente do tipo completamente desenvolvido em condutas. Uma característica é as soluções apresentadas serem válidas para um determinado modelo de fluido não-newtoniano viscoelástico.

### 1.1 Interesse

O número de soluções analíticas conhecidas das equações que governam o escoamento de fluidos é relativamente pequeno e essa escassez constitui um dos factores de interesse e de motivação na procura de mais soluções. No caso de fluidos Newtonianos as equações que governam o seu movimento são conhecidas e se fosse possível resolvê-las no caso geral, então não haveriam problemas não-resolvidos nessa área. No entanto a não-linearidade das equações, a ocorrência de instabilidades e o aparecimento do regime turbulento, fazem com que as soluções exactas conhecidas sejam poucas. No caso dos fluidos não-Newtonianos existe o desconhecimento adicional das equações que governam a reologia, ou o comportamento constitutivo dos mesmos, pelo que as equações de partida não são exactamente conhecidas. Para este caso existe uma série de modelos constitutivos que podem representar mais ou menos aproximadamente o comportamento dos fluidos reais, e podem procurar-se soluções para alguns desses modelos em problemas particulares.

O interesse no conhecimento de soluções analíticas prende-se com:

- Estudo teórico de algumas classes particulares de escoamentos, e que permite depois entrever o comportamento de escoamentos mais complexos para os quais não há soluções exactas. Base dos métodos de perturbação.
- Verificação de resultados experimentais, comprovação do bom funcionamento de instrumentos de medida, calibração destes, desenvolvimento de métodos experimentais para a determinação das propriedades físicas dos fluidos (reometria; viscosímetros; etc...).
- Verificação de hipóteses assumidas no desenvolvimento da teoria do escoamento de fluidos viscosos (por exemplo, hipótese de não-escorregamento numa parede sólida).
- Utilização como condições fronteira em simulações numéricas e como aferição da precisão dos resultados dessas simulações.

### 1.2 Análises simples e complexas

A resolução de problemas de mecânica de fluidos pode envolver análise matemática relativamente simples ou, então, pode requerer métodos de análise mais complexos. As soluções aqui apresentadas caem no primeiro tipo, envolvendo basicamente equações diferenciais ordinárias com soluções relativamente simples (embora possam ser trabalhosas de obter) e só em alguns casos aparecem funções transcendentais. Como exemplo do que designamos por métodos complexos, temos:

- uso de transformadas de Laplace;
- métodos de “semelhança” (*similarity*) (por exemplo para camada limite, e na solução dos problemas de Stokes de 1ª e 2ª espécie);
- métodos de aproximação (partem duma solução válida para fluido sem viscosidade – escoamento potencial – e modificam-na de forma a incluir a condição de não-eskorregamento);
- separação de variáveis (equações às derivadas parciais com mais de 2 variáveis independentes);
- mudança de variáveis;
- métodos de variáveis complexas e transformações geométricas (por exemplo, para o escoamento num espaço anular excêntrico).

### 1.3 Soluções analíticas e semi-analíticas

As soluções exactas das equações da mecânica dos fluidos podem ser expressas por funções analíticas que dão explicitamente as variáveis dependentes que se procuram determinar (velocidade, tensões, pressão, etc), em função das variáveis independentes (variável espacial, parâmetros, etc). Neste caso a solução exacta é totalmente analítica, sendo o caso da maior parte das soluções aqui apresentadas. No entanto, por vezes algum dos parâmetros da solução tem de satisfazer uma equação transcendente e não se consegue expressar explicitamente como função das restantes variáveis independentes. Nestes casos é necessário recorrer a métodos numéricos (aproximados) para resolver essa equação transcendente, pelo que a solução exacta não é totalmente analítica – designa-se então como mista analítica/numérica ou semi-analítica. Este tipo de situação também ocorre com algumas das soluções aqui apresentadas, sendo típico dos problemas de escoamentos em condutas quando se pretende expressar a solução como função do caudal (ou da velocidade média). Este problema é designado como problema inverso. O problema directo corresponde ao caso em que o gradiente de pressão é conhecido (é dado) e o caudal deve ser calculado – nestes casos é mais fácil obter soluções totalmente analíticas, como se vai ver.

### 1.4 Problemas de escoamentos em condutas ou tubos

Como foi já referido, o interesse deste trabalho está na solução de problemas de escoamentos completamente desenvolvidos em canais planos e em tubos de secção circular. Este é um dos problemas básicos nas soluções exactas em Mecânica dos Fluidos, segundo a classificação de White (1991). Na secção 2 são dados os resultados para fluidos Newtonianos e Newtonianos-generalizados, cujas soluções são conhecidas há muitos anos sendo amíude referidas nos livros da especialidade (ver Bird et al 1960 e 1977). Na secção

3 é considerado o caso dum fluido viscoelástico que obedece à equação constitutiva de Phan-Thien e Tanner (ver ref. de 1977). Na secção 4 esse mesmo modelo constitutivo é usado na resolução do problema do escoamento num espaço anular concêntrico. Finalmente, na secção 5 é considerado o problema do escoamento laminar com transferência de calor num tubo, sendo aplicada a condição de fluxo de calor imposto na parede.

O escoamento de fluidos Newtonianos em condutas foi analisado por exemplo por Shah e London (1978) para muitos tipos de secção transversal e, para além do interesse óbvio em aplicações de engenharia, tem interesse pelo facto de poder ser aplicado na determinação da viscosidade dos fluidos por meio de viscosímetros capilares de tubo ou canal plano. Neste tipo de instrumentos é medido o caudal que se escoia nas condutas e o gradiente de pressão aplicado; sendo conhecida a solução analítica do escoamento, consegue-se determinar a partir da relação caudal/perda-de-pressão a viscosidade do fluido. Alguns exemplos deste tipo de aplicações para fluidos Newtonianos-generalizados são dados no livro de Barnes et al (1989).

## **2. SOLUÇÃO EM CANAL E TUBO PARA FLUIDOS NEWTONIANOS E NÃO-NEWTONIANOS GENERALIZADOS**

É primeiramente feita a dedução detalhada da solução para escoamento de Poiseuille plano dum fluido Newtoniano (secção 2.1) seguido do caso não-Newtoniano com viscosidade a variar em lei-de-potência (secção 2.2). Nesta segunda secção são esboçadas as diferenças que ocorrem para o escoamento axissimétrico (dentro de tubos).

### **2.1 Fluido Newtoniano (Escoamento de Poiseuille)**

Esta é uma das soluções básicas e mais simples, aprendida num curso básico de Mecânica de Fluidos. O perfil de velocidade pode ser obtido mais facilmente através dum balanço integral de forças (ver por ex. Bird et al (1960), sec. 2.3) ou então é deduzido analiticamente a partir das equações gerais de Navier-Stokes. Esta última vai ser a via aqui seguida. Uma vez em posse do perfil de velocidade, que é definido localmente, podemos obter facilmente várias quantidades integrais de interesse e relações entre elas, como por exemplo o caudal volumétrico ( $\dot{Q}$ ) em função da perda de pressão ( $\Delta p$ ), ou o factor de fricção ( $f$ ). É interessante notar que, historicamente, estas relações foram obtidas por experimentação em 1839-41 por G. Hagen e J.L Poiseuille, e só mais tarde foram deduzidas analiticamente a partir das equações de governo.

Vamos considerar primeiramente o caso plano pois permite a utilização mais fácil de notação tensorial Cartesiana que deve ser do conhecimento dum aluno de Mestrado. A 2ª Lei de Newton ( $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ) aplicada a um elemento diferencial dum meio contínuo qualquer (no nosso caso vai ser um fluido incompressível) escreve-se vectorialmente como:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{f} \quad (2.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $\mathbf{u}$  o vector velocidade,  $\nabla \equiv \hat{\mathbf{x}}_i \partial / \partial x_i$ ,  $D/Dt \equiv \partial / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  a derivada substantiva,  $\underline{\sigma}$  o tensor das tensões, e  $\mathbf{f}$  uma força qualquer exterior por unidade de massa (normalmente a gravidade  $\mathbf{g}$ ). O tensor das tensões decompõe-se usualmente numa parte esférica de pressão,  $p$ , mais um tensor extra,  $\underline{\tau}$ ,

$$\underline{\sigma} = -p \underline{\delta} + \underline{\tau} \quad (2.2)$$

pelo que (2.1) fica:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\tau} + \rho \mathbf{f} \quad (2.3)$$

Para um fluido Newtoniano, como o ar ou a água, o tensor extra só tem parte viscosa (viscosidade  $\mu$ ), sendo nulo quando o fluido está em equilíbrio, e é dado pela seguinte equação constitutiva:

$$\underline{\tau} = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \underline{\delta} \quad (2.4)$$

onde se incorpora já a denominada hipótese de Stokes para o segundo coeficiente de viscosidade (ver Schlichting 1968 ou Currie 1993). Com esta hipótese temos que o traço de  $\underline{\tau}$  é nulo ( $\text{tr}(\underline{\tau}) = 0$ ) pelo que  $\underline{\tau}$  é o tensor desviador de  $\underline{\sigma}$ . Para fluidos cuja equação constitutiva seja mais complexa esta propriedade não se aplica.

Finalmente o campo de velocidade  $\mathbf{u}$  deve ser tal que verifica a conservação de massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

que para um fluido incompressível (o caso típico dum líquido, como a água ou uma solução polimérica) se reduz a:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

Se introduzirmos as Eqs. (2.4) e (2.6) em (2.3) obtemos as habituais equações de Navier-Stokes válidas para um fluido Newtoniano com viscosidade constante:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \equiv \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \quad (2.7)$$

onde  $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$  é o Laplaciano. No caso geral dum campo de velocidade tridimensional a Eq. vectorial (2.7) representa 3 equações escalares para as 3 componentes da velocidade ( $u, v, w$ , segundo  $x, y, z$ ) e a equação da continuidade (2.6) permite (indirectamente) o cálculo da pressão  $p$ , pelo que o problema é “fechado”. Os problemas a serem aqui abordados são todos unidimensionais ou bidimensionais, pelo que nos podemos restringir a este caso. Expandindo a Eq. (2.3) em coordenadas Cartesianas obtemos:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho f_x \quad (2.8)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \rho f_y \quad (2.9)$$

e a equação da continuidade Eq. (2.6) fica:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.10)$$

Por sua vez a equação constitutiva (2.4) expandida escreve-se:

$$\tau_{xx} = 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$\tau_{yy} = 2 \mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.12)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.13)$$

Neste primeiro problema vamos procurar uma solução para um escoamento estacionário e completamente desenvolvido, num canal plano alinhado com o eixo  $x$  e com direcção transversal  $y$ . A título didático, neste caso daremos todos os passos do raciocínio dedutivo. A noção de “completamente desenvolvido” implica que nenhuma das propriedades do escoamento (velocidades e  $\nabla p$ ) pode variar ao longo do canal, isto é, essas propriedades são independentes de  $x$ .

Deste modo  $u = u(y)$  e  $v = v(y)$ , e assim  $\partial u / \partial x = 0$ , pelo que a equação da continuidade (2.10) implica  $\partial v / \partial y = 0$ , ou seja  $v = \text{constante}$ . Mas a condição na parede é  $u = v = 0$ , o que implica  $v = 0$  para  $\forall y$ . As equações do movimento (2.8) e (2.9) reduzem-se a:

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (2.14)$$

e

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (2.15)$$

não sendo consideradas forças exteriores. As equações constitutivas relevantes ficam:

$$\tau_{yy} = 0 \quad (\text{de Eq. 2.12, com } v = 0) \quad (2.16)$$

e

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.17)$$

e deste modo (Eqs. 2.15 e 2.16) a pressão não pode variar com  $y$ , o que implica que  $\partial p / \partial x \equiv dp/dx$  é uma constante. Fisicamente  $dp/dx$  representa o gradiente de pressão que é imposto e que vai produzir o movimento do fluido. A equação diferencial a resolver fica simplesmente, das Eqs. (2.14) e (2.17):

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (2.18)$$

sujeita às condições fronteira:  $u = 0$  em  $y = H$  (na parede;  $H$  é meia-altura do canal), e  $\partial u / \partial y = 0$  em  $y = 0$  (no plano de simetria alinhado com o eixo do canal). A integração é imediata, resultando no perfil de velocidade parabólico:

$$u(y) = \frac{-(dp/dx)H^2}{2\mu} \left(1 - \left(\frac{y}{H}\right)^2\right) \quad (2.19)$$

Com a finalidade de relacionarmos o gradiente de pressão com o caudal volumétrico por unidade de largura ( $\dot{Q} = 2HU$ ), temos de integrar o perfil de velocidade através da semi-altura do canal, para obter:

$$U = \frac{1}{H} \int_0^H u(y) dy = \frac{-(dp/dx)H^2}{3\mu} \quad (2.20)$$

e assim o caudal vem

$$\dot{Q} = \frac{2H^3 \Delta p}{3\mu L} \quad (2.21)$$

expressão que representa o resultado de Hagen-Poiseuille para o escoamento em canal plano de comprimento  $L$  (nota:  $-dp/dx = \Delta p/L$ ). A velocidade máxima ocorre no linha central,  $y = 0$ , sendo dada por (de Eq. 2.19 e 2.20):

$$U_0 = \frac{3}{2} U = \frac{-(dp/dx)H^2}{2\mu}. \quad (2.22)$$

ou seja, é igual a 1.5 vezes a velocidade média. O factor de fricção na parede é determinado a partir da definição:

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (2.23)$$

onde  $\tau_w$  representa a magnitude da tensão de corte na parede, que pode ser obtida da Eq. (2.17) após derivação do perfil de velocidades (2.19):



$$\tau_w \equiv |\tau_{xy}|(y = H) = -\frac{dp}{dx} H = 3\mu \frac{U}{H}. \quad (2.24)$$

Substituindo valores em (2.23) e usando a definição do número de Reynolds apropriada para um canal (diâmetro hidráulico igual a  $2H$ ),  $Re = \rho U 2H / \mu$ , obtém-se a conhecida relação:

$$f = \frac{12}{Re} \quad (2.25)$$

Obtivemos assim, para um fluido Newtoniano a escoar-se num canal com paredes paralelas separadas por uma distância  $2H$ , o perfil de velocidade dado pela Eq. (2.19), a relação entre a velocidade média ou caudal e o gradiente de pressão (Eqs. 2.20 e 2.21), a velocidade máxima, Eq. (2.22), e o factor de fricção devido ao atrito viscoso na parede, Eq. (2.25). Vamos estudar agora o problema idêntico mas para um fluido não-Newtoniano inelástico.

## 2.2 Fluido Tipo “Lei-de-potência”

A primeira generalização dos resultados da secção anterior é feita para um dos mais simples modelos constitutivos do tipo Newtoniano-generalizado (GNF=*generalized Newtonian fluid*). Neste tipo de modelo as equações para um líquido não-Newtoniano seguem as mesmas expressões que para o caso Newtoniano, mas o coeficiente de viscosidade (designado  $\eta$ , em vez de  $\mu$ ) é agora uma função do segundo invariante da taxa de deformação  $\dot{\gamma}$ ,

$$\eta = \eta(\dot{\gamma}) \quad (2.26)$$

Uma das expressões deste tipo que permite representar o efeito de *shear-thinning* (espessante regressivo: diminuição de  $\eta$  com  $\dot{\gamma}$ ) é o modelo de lei-de-potência (ou Ostwald-de Waele, ver Bird et al 1960):

$$\eta = K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (2.27)$$

onde  $K$  é a consistência e  $n$  o índice. Se  $n = 1$  obtemos  $\eta = \text{constante}$ , ou seja um fluido Newtoniano; quanto menor for  $n$ , maior é a redução da viscosidade com a taxa de deformação (diz-se que mais pseudoplástico é o fluido).

Em geral para o caso bidimensional, sendo  $\underline{D} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^t)$  o tensor da taxa de deformação, temos:

$$\dot{\gamma} = II(\underline{D}) = \sqrt{2\underline{D} : \underline{D}} = \{2[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2] + [\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}]^2\}^{1/2}.$$

No caso particular do escoamento completamente desenvolvido em canal,

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy} \quad (2.28)$$

e a nova equação diferencial a resolver, em lugar de (2.18), fica:

$$\frac{d}{dy} \left( K \left( \frac{du}{dy} \right)^{n-1} \frac{du}{dy} \right) = \frac{dp}{dx} \quad (2.29)$$

Integrando e aplicando as mesmas condições fronteira utilizadas antes, obtemos:

$$u(y) = \frac{-((dp/dx)/K)^{1/n} H^{1+1/n}}{1+1/n} \left( 1 - \left( \frac{y}{H} \right)^{1+1/n} \right) \quad (2.30)$$

expressão idêntica à dada em Barnes et al (1989). Para  $n = 1$ , volta-se a obter o perfil de velocidade Newtoniano (2.19), com  $K$  em vez de  $\mu$ . A relação integral entre o caudal e a perda de pressão é agora:

$$\dot{Q} = \frac{2H^2}{(1/n)+2} \left( \frac{\tau_w}{K} \right)^{1/n} \quad (2.31)$$

onde a tensão de corte na parede continua a ser dada pela primeira parte da Eq. (2.24), isto é  $\tau_w = (\Delta p)H/L$ .

Para o caso mais usual na prática de escoamento completamente desenvolvido em **tubos de secção circular** é conveniente usar coordenadas cilíndricas, com o eixo do tubo segundo  $x$ , coordenada radial  $r$  e ângulo azimutal  $\theta$ . Por razões de simetria a solução não pode depender de  $\theta$  e as equações dinâmicas reduzem-se a:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \eta(\dot{\gamma}) r \frac{du(r)}{dr} \right) = \frac{dp}{dx} \quad (2.32)$$

que substitui a anterior Eq. (2.18) e permite obter a variação da velocidade axial em função da posição radial. A integração é simples e neste caso, além da condição de não-eskorregamento na parede ( $u(R) = 0$ ,  $R \equiv$  raio do tubo), deve usar-se a condição de tensão de corte finita no eixo. Por exemplo, para o caso Newtoniano ( $\eta(\dot{\gamma}) = \mu$ , constante) uma primeira integração fornece:

$$\mu r \frac{du(r)}{dr} = \frac{dp}{dx} \frac{r^2}{2} + C_1 \Rightarrow \tau_{xr} = \mu \frac{du}{dr} = \frac{dp}{dx} \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

A condição fronteira referida implica  $C_1 = 0$  para evitar  $\tau_{xr} \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow 0$ . A segunda integração dá o habitual perfil parabólico (semelhante ao obtido anteriormente para o canal):

$$u(r) = \frac{-(dp/dx)R^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \quad (2.33)$$

que permite calcular a velocidade média, através de:

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r u(r) dr = \frac{-(dp/dx)R^2}{8\mu} \quad (2.34)$$

dando um caudal de:

$$\dot{Q} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}. \quad (2.35)$$

Esta é a conhecida relação de Hagen-Poiseuille. É fácil verificar também que neste caso a velocidade máxima, no eixo do tubo, é o dobro da velocidade média, isto é  $U_0 = 2U$ . A tensão de corte na parede é útil para efeitos de adimensionalização, sendo obtida da equação dada acima para  $\tau_{xr}$  e de (2.34), obtendo-se:

$$\tau_w = 4\mu \frac{U}{R}. \quad (2.36)$$

(comparar com 2.24).

No caso não-Newtoniano com modelo de viscosidade do tipo lei-de-potência, uma dedução semelhante permite obter:

$$u(r) = \frac{-((dp/dx)/2K)^{1/n} R^{1+1/n}}{1+1/n} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{1+1/n}\right) \quad (2.37)$$

e

$$\dot{Q} = \frac{\pi R^3}{(1/n)+3} \left(\frac{\tau_w}{K}\right)^{1/n} \quad (2.38)$$

onde a tensão de corte na parede é dada por  $\tau_w = (\Delta p)R/2L = (-dp/dx)R/2$ . Estas expressões são dadas por Bird et al (1977) (exemplo 5.2-1).

### 3. SOLUÇÃO EM CANAL E TUBO PARA FLUIDO VISCOELÁSTICO

Nesta secção são deduzidas expressões para os perfis de velocidade e tensões em escoamento completamente desenvolvido dentro de canais planos ou tubos circulares, para o caso mais complexo dum tipo particular de fluido viscoelástico. Os resultados a serem apresentados não se encontram nos livros da especialidade, ao contrário dos da secção 2, e por isso tem algum interesse incluí-los numa lição síntese com a finalidade da presente.

#### 3.1 Modelo Reológico

Um fluido viscoelástico, ao contrário do fluido Newtoniano ou Newtoniano-generalizado tratado anteriormente, tem “memória” dos estados de deformação a que esteve submetido no passado, de forma que a sua equação constitutiva do tipo diferencial deve conter termos convectivos. Estes vão introduzir efeitos não-locais no estado de deformação numa dada localização espacial, enquanto para o fluido Newtoniano o estado de tensão está associado à taxa de deformação local, como mostram as Eqs. (2.4). Neste trabalho é considerado um modelo constitutivo particular, mas muito utilizado em simulações numéricas, o denominado modelo de Phan-Thien/Tanner (1977) (PTT) definido pela equação reológica

$$f(\text{tr}(\underline{\underline{T}})) \underline{\underline{T}} + \lambda \frac{\nabla}{\underline{\underline{T}}} = 2\eta \underline{\underline{D}} \quad (3.1)$$

onde  $\underline{\underline{T}}$  é o tensor extra das tensões (vide Eq. 2.2),  $\underline{\underline{D}}$  o tensor da taxa de deformação,  $\lambda$  o tempo de relaxação,  $\eta$  o coeficiente de viscosidade (constante), e a derivada convectiva superior de  $\underline{\underline{T}}$  é definida como:

$$\frac{\nabla}{\underline{\underline{T}}} = \frac{D\underline{\underline{T}}}{Dt} - \underline{\underline{T}} \cdot \nabla \underline{\underline{u}} - \nabla \underline{\underline{u}}^t \cdot \underline{\underline{T}}. \quad (3.2)$$

por vezes designada como derivada de Oldroyd. A função do traço do tensor das tensões,  $f(\text{tr}(\underline{\underline{T}}))$ , é uma função própria do modelo PTT e pode tomar as duas formas:

$$f(\text{tr}(\underline{\underline{T}})) = 1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta} \text{tr}(\underline{\underline{T}}) \quad (\text{modelo PTT-linear}) \quad (3.3)$$

ou

$$f(\text{tr}(\underline{\underline{T}})) = \exp\left(\frac{\epsilon\lambda}{\eta} \text{tr}(\underline{\underline{T}})\right) \quad (\text{modelo PTT-exponencial}). \quad (3.4)$$

O tempo de relaxação caracteriza a elasticidade do fluido; um fluido com relaxação instantânea das tensões tem  $\lambda = 0$  e a Eq. (3.1) reduz-se à do modelo Newtoniano-generalizado, ou seja trata-se dum fluido não-elástico. O parâmetro  $\epsilon$  da função  $f(\text{tr}(\underline{\underline{T}}))$  é próprio do modelo PTT e está relacionado com as propriedades extensionais do fluido: quando maior for  $\epsilon$ , menor a viscosidade elongacional máxima do fluido, num escoamento de extensão uniaxial. Se  $\epsilon = 0$ , as duas formas para a função  $f()$  reduzem-se à unidade, e

o modelo PTT reduz-se ao conhecido modelo convectivo superior de Maxwell (UCM: *Upper Convected Maxwell*). Este é um dos modelos mais simples usados para representar a viscoelasticidade dos fluidos, mas no caso de escoamentos completamente desenvolvidos em canal ou tubo a solução para o campo de velocidade é idêntica à Newtoniana (vide Bird et al 1977), sendo fácil de obter. No caso do modelo PTT com  $\epsilon \neq 0$ , iremos ver que o campo de velocidade difere do Newtoniano, sendo bastante mais complexo e difícil de deduzir.

É notório, por comparação da presente equação constitutiva viscoelástica (3.1) com a correspondente Newtoniana (2.4), que o problema da obtenção de soluções analíticas para um determinado escoamento se torna agora consideravelmente mais complicado. O primeiro ponto a frisar está ligado ao facto destas equações constitutivas terem de ser resolvidas em conjugação com as equações de conservação de massa (2.6) e de quantidade de movimento (2.3). Basta notar que agora a equação constitutiva não é explícita nos gradientes de velocidade e não pode ser simplesmente substituída no balanço de forças para se obter as equações de Navier-Stokes, que permitiam (idealmente) a obtenção directa das velocidades. De facto, para fluidos viscoelásticos as equações para as tensões constituem um sistema de 6 equações diferenciais (às derivadas parciais de tipo hiperbólico) que governam o transporte dessas tensões e que terão de ser resolvidas em conjunto com as restantes equações de conservação. Na maior parte dos casos torna-se necessário a utilização de métodos numéricos juntamente com alguma forma de iteração entre a solução para o campo de velocidades e o de tensões. Em alguns casos particulares, como aqui vai ser mostrado, podem no entanto ser obtidas soluções analíticas.

### 3.2 Equações Simplificadas

Expandindo as equações constitutivas do modelo PTT, Eq. (3.1), para um caso bidimensional em coordenadas Cartesianas, obtemos:

$$f(\tau_{kk})\tau_{xx} + \lambda\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial t} + u\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + v\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial y}\right) = 2\eta\frac{\partial u}{\partial x} + 2\lambda\left(\tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (3.5)$$

$$f(\tau_{kk})\tau_{yy} + \lambda\left(\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial t} + u\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial x} + v\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}\right) = 2\eta\frac{\partial v}{\partial y} + 2\lambda\left(\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (3.6)$$

$$f(\tau_{kk})\tau_{xy} + \lambda\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial t} + u\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + v\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right) = \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \lambda\left(\tau_{xx}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (3.7)$$

com as duas hipóteses para a função das tensões  $f()$ :

$$f(\tau_{kk}) = 1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta}(\tau_{xx} + \tau_{yy}) \quad (\text{para modelo PTT-linear})$$

ou

$$f(\tau_{kk}) = \exp\left(\frac{\epsilon\lambda}{\eta}(\tau_{xx} + \tau_{yy})\right) \quad (\text{para modelo PTT-exponencial}).$$

Um problema de escoamento dum fluido viscoelástico implica a resolução destas equações (3.5 a 3.7), conjuntamente com a equação da continuidade (2.10) e as do movimento (2.8-2.9). É óbvio que esta tarefa é formidável para um caso genérico, mesmo na situação bidimensional e em regime laminar e estacionário. Faz-se notar que em grande parte dos problemas envolvendo fluidos viscoelásticos estamos em regime laminar, devido à elevada viscosidade dos fluidos em causa, de forma que, pelo menos, é evitada a complicação adicional introduzida pela turbulência. Só no caso de soluções poliméricas muito diluídas é que a turbulência se torna relevante, muitas vezes relacionada com o fenómeno de redução do arrasto em tubos ou outro equipamento. No presente trabalho não são considerados escoamentos em regime turbulento ou na transição laminar/turbulento.

Para escoamentos unidireccionais completamente desenvolvidos em condutas as equações constitutivas simplificam-se ( $\partial/\partial x \equiv 0$  e  $\partial v/\partial y = 0$ ), ficando:

$$f(\tau_{kk})\tau_{xx} = 2\lambda\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.8)$$

$$f(\tau_{kk})\tau_{yy} = 0 \quad (3.9)$$

$$f(\tau_{kk})\tau_{xy} = \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda\tau_{yy}\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.10)$$

com o traço do tensor das tensões dado por  $\tau_{kk} = \tau_{xx} + \tau_{yy}$ . A Eq. (3.9) implica que  $\tau_{yy} = 0$  pelo que  $\tau_{kk} = \tau_{xx}$  e a única tensão normal é a axial. Com estas simplificações a única equação da quantidade de movimento relevante é a da componente axial (das Eqs. 2.14 e 2.15) que pode ser imediatamente integrada, resultando em

$$\tau_{xy} = \frac{dp}{dx} y \quad (3.11)$$

para o caso plano, e

$$\tau_{xr} = \frac{dp}{dx} \frac{r}{2} \quad (3.12)$$

para o caso axissimétrico.

Apesar do conjunto de equações constitutivas ser não-linear nas tensões, é possível resolvê-las fazendo desaparecer a função  $f$  por divisão de (3.8) por (3.10), resultando:

$$\tau_{xx} = \frac{2\lambda\tau_{xy}^2}{\eta} \quad (3.13)$$

e substituindo  $\tau_{xy}$ , dado por (3.11) para o caso plano, temos:

$$\tau_{xx} = \frac{2\lambda}{\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right)^2 y^2. \quad (3.14)$$

O caso axissimétrico vem, de forma semelhante,

$$\tau_{xx} = \frac{2\lambda}{\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right)^2 \frac{r^2}{4}. \quad (3.15)$$

Finalmente o gradiente de velocidade é determinado explicitamente de (3.10), depois de se introduzirem as expressões de  $\tau_{xx}$  (Eq. 3.14) e de  $\tau_{xy}$  (Eq. 3.11):

$$\frac{du}{dy} = f \left( \frac{2\lambda}{\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right)^2 y^2 \right) \frac{dp}{dx} \frac{y}{\eta} \quad (\text{caso plano}) \quad (3.16)$$

e

$$\frac{du}{dr} = f \left( \frac{2\lambda}{\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right)^2 \frac{r^2}{4} \right) \frac{dp}{dx} \frac{r}{2\eta} \quad (\text{caso axissimétrico}) \quad (3.17)$$

### 3.3 Resolução para Fluido PTT-linear

A função de tensão  $f(\cdot)$  é, para este caso, definida por:

$$f(\tau_{kk}) = 1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta} \tau_{xx} \quad (3.18)$$

com  $\tau_{xx}$  dado, respectivamente, por (3.14) para o caso plano, e por (3.15) para o caso axissimétrico.

#### 3.3.1 Canal plano

A expressão para a taxa de deformação, Eq. (3.16), depois de se ter substituído a função  $f(\cdot)$  em jogo (Eq. 3.18), deve ser integrada entre  $y = 0$  (a linha central) e  $y = H$  (a parede do canal) resultando em:

$$u(y) = - \frac{dp}{dx} \frac{H^2}{2\eta} \left( 1 - \left( \frac{y}{H} \right)^2 \right) \left( 1 + \frac{\epsilon\lambda^2 \left( \frac{dp}{dx} \right)^2 H^2}{\eta^2} \left( 1 + \left( \frac{y}{H} \right)^2 \right) \right) \quad (3.19)$$

ou seja, obtem-se um perfil composto por uma variação parabólica (1ª parte de 3.19) corrigida por um factor também parabólico em  $y$  — a variação  $u \sim y$  é assim quártica em  $y$ . A velocidade máxima, em  $y = 0$ , já não é, no entanto, igual à expressão Newtoniana (Eq. 2.22), assim como a velocidade média (ou o caudal) que é obtida por integração de (3.19):

$$U \equiv \frac{1}{H} \int_0^H u(y) dy = \frac{-\frac{dp}{dx} H^2}{3\eta} \left( 1 + \frac{6\epsilon \lambda^2 (\frac{dp}{dx})^2 H^2}{5\eta^2} \right) \quad (3.20)$$

Na maior parte dos casos é conhecida a velocidade média  $U$ , proporcional ao caudal  $\dot{Q} = 2HU$ , e o gradiente de pressão ( $dp/dx$ ) é uma incógnita do problema, devendo ser obtido por solução da equação cúbica (3.20). Para facilitar a sua solução, esta é escrita de forma adimensional como:

$$X (1 + bX^2) = 1 \quad (3.21)$$

com  $X \equiv U_N/U$  representando o gradiente de pressão adimensional, onde  $U_N \equiv (-dp/dx)H^2/3\eta$  é igual à velocidade média do caso Newtoniano (comparar com Eq. 2.20) e  $b \equiv 54\epsilon De^2/5$ . A elasticidade é quantificada pelo usual número de Deborah,  $De \equiv \lambda U/H$ , que representa a razão entre o tempo de relaxação, típico do fluido, e um tempo característico do escoamento, dado por  $H/U$  na presente geometria. A solução da equação cúbica (3.21) pode ser obtida explicitamente de fórmulas da Álgebra e não é aqui dada. Com  $X$  conhecido, o perfil de velocidade adimensional vem:

$$\frac{u(y)}{U} = 1.5 X \left( 1 - \left( \frac{y}{H} \right)^2 \right) \left( 1 + 9\epsilon De^2 X^2 \left( 1 + \left( \frac{y}{H} \right)^2 \right) \right) \quad (3.22)$$

e as componentes do tensor das tensões (de 3.14 e 3.11) vêm:

$$T_{xx} \equiv \frac{\tau_{xx}}{3\eta U/H} = 6De X^2 \left( \frac{y}{H} \right)^2 \quad (3.23)$$

e

$$T_{xy} \equiv \frac{\tau_{xy}}{3\eta U/H} = -X \left( \frac{y}{H} \right) \quad (3.24)$$

estando adimensionalizadas por  $\tau_w = 3\eta U/H$ , que representa a tensão de corte na parede para um fluido Newtoniano (vide Eq. 2.24).

### **3.3.2 Tubo de secção circular**

Para este caso, mais frequente em aplicações práticas, a equação de partida é a (3.17) que pode ser integrada entre  $r = 0$  (eixo do tubo) e  $r = R$  (raio do tubo), para obter:

$$\frac{u(r)}{U} = 2 X \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \left( 1 + 16\epsilon De^2 X^2 \left( 1 + \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \right) \quad (3.25)$$

onde o gradiente de pressão adimensional é agora obtido de:

$$X (1 + bX^2) = 1, \quad X = U_N/U, \quad U_N = \frac{-\frac{dp}{dx} R^2}{8\eta}, \quad b = \frac{64}{3}\epsilon De^2 \quad (3.26)$$



por integração do perfil de velocidade. O número de Deborah é definido por  $De = \lambda U/R$ . A variação das tensões é dada por, da Eq. (3.15) e da Eq. (3.12):

$$T_{xx} \equiv \frac{\tau_{xx}}{4\eta U/R} = 8DeX^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (3.27)$$

e

$$T_{xr} \equiv \frac{\tau_{xr}}{4\eta U/R} = -X \left(\frac{r}{R}\right). \quad (3.28)$$

Como se vê o perfil da componente tangencial da tensão é novamente linear através da secção do tubo, enquanto que a componente normal é quadrática em  $r$ .

### 3.3.3 Algumas variações representativas

Nas Figuras 3.1 e 3.2 são apresentados alguns perfis típicos para a velocidade e para as componentes da tensão, para o caso do escoamento completamente desenvolvido num tubo de secção circular. Os casos representados têm  $\epsilon = 0.1$ , um valor típico para polímeros fundidos, e correspondem a valores crescentes de elasticidade definida pelo número de Deborah. Observe-se como o perfil de velocidade fica mais achatado à medida que o  $De$  aumenta, o que está relacionado com a característica de *shear-thinning* do modelo PTT (o parâmetro  $\eta$  do modelo é constante mas a viscosidade de corte, definida como  $\eta(\dot{\gamma}) \equiv \tau_{xy}/\dot{\gamma}$  num escoamento de corte simples, diminui com  $\dot{\gamma}$  a aumentar).

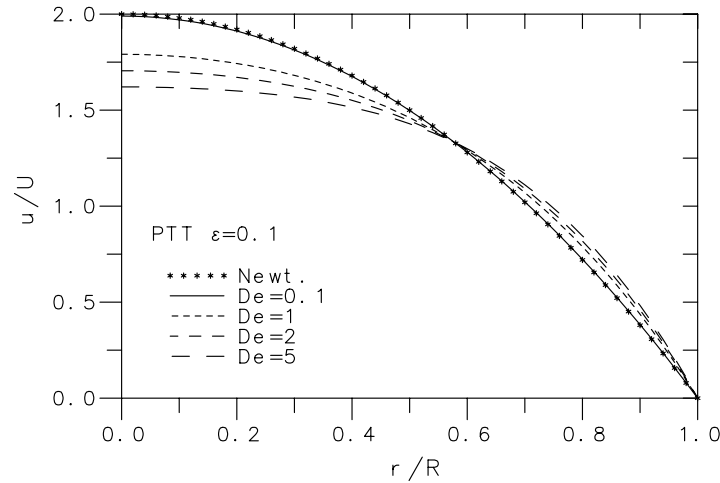


Fig. 3.1 Perfis de velocidade em tubo para vários  $De$ , com  $\epsilon = 0.1$  e PTT-linear.

Este tipo de comportamento fica bem patente na diminuição com  $De$  do gradiente de pressão necessário para mover um determinado caudal de fluido viscoelástico, cuja variação é representada na Fig. 3.3. Para  $De = 0$ , o caso Newtoniano, temos  $X = U_N/U = 1$ , ou seja a velocidade média é igual à Newtoniana. Para valores de  $De$  progressivamente maiores, o gradiente de pressão adimensional  $X$  diminui

significativamente, como a figura mostra. Esta situação é idêntica a considerar que a velocidade média do escoamento viscoelástico aumenta, devido ao achatamento dos perfis de velocidade.

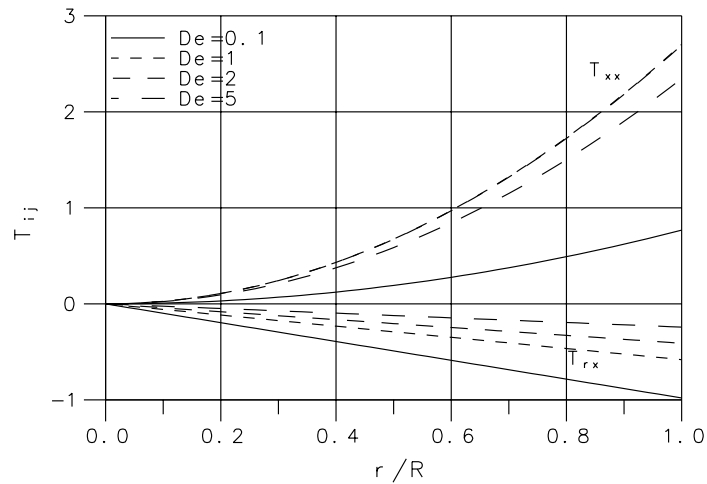


Fig. 3.2 Perfis de tensão (normal e tangencial) em tubo para vários  $De$ , com  $\epsilon = 0.1$  e PTT-linear.

Com interesse teórico nota-se a variação não-monotônica das tensões normais  $T_{xx}$  com a elasticidade, observada na Fig. 3.2. Para  $De \leq 1$ , a tensão aumenta com  $De$ ; mas para  $De$  maior que 1, a tensão normal começa a diminuir. Uma explicação para este comportamento contra-intuitivo não foi ainda encontrada.

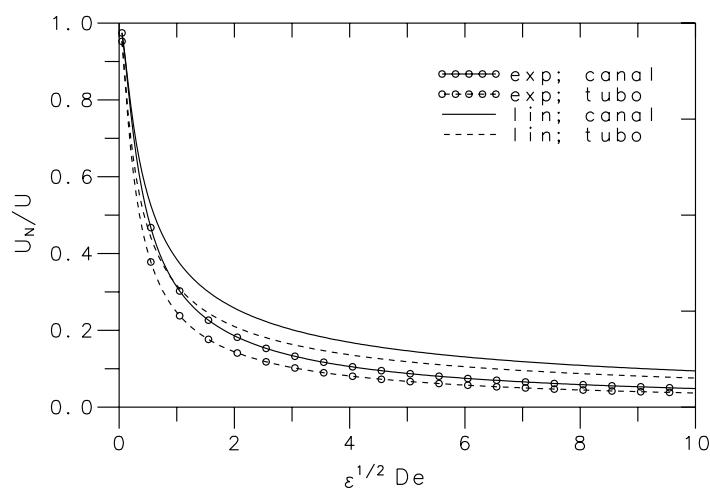


Fig. 3.3 Solução da equação cúbica para  $X = U_N/U$ , nos casos de canal plano e tubo circular, com modelo PTT-linear e PTT-exponencial.

### 3.4 Resolução para Fluido PTT-exponencial

A diferença essencial entre o PTT-linear e o PTT-exponencial reside na variação da viscosidade elongacional com a taxa de deformação extensional  $\dot{\epsilon}$ , que apresenta um plateau para  $\dot{\epsilon}$  elevados no primeiro modelo, e exibe um máximo no segundo modelo. Esta variação do PTT-exponencial é mais realista para muitos polímeros fundidos (ver Bird et al 1977). A função  $f()$  é agora definida pela Eq. (3.4) que deve ser introduzida na expressão para o gradiente de velocidade que, para o caso plano, fica (de 3.16):

$$\frac{du}{dy} = \exp\left(\frac{2\epsilon\lambda^2}{\eta^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 y^2\right) \frac{dp}{dx} \frac{y}{\eta} \quad (3.29)$$

Integração desta equação entre  $y = 0$ ,  $u = 0$ , e  $y$  genérico, dá o perfil de velocidade:

$$u(y) = \frac{\exp\left(\frac{2\epsilon\lambda^2 H^2 \left(\frac{dp}{dx}\right)^2}{\eta^2}\right)}{\frac{-\frac{dp}{dx} 4\epsilon\lambda^2}{\eta}} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\epsilon\lambda^2 \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 H^2}{\eta^2} \left(1 - \left(\frac{y}{H}\right)^2\right)\right)\right) \quad (3.30)$$

Quando  $dp/dx$  é dado, esta expressão representa uma solução analítica do problema. Quando o caudal é dado, é preciso relaciona-lo com o  $dp/dx$ , ou seja, precisamos de integrar o perfil de velocidade (3.30) para obter:

$$U = \frac{-\eta}{4\epsilon\lambda^2 \frac{dp}{dx}} \left( \exp\left(\frac{2\epsilon\lambda^2 \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 H^2}{\eta^2}\right) - \frac{\eta}{2\lambda \frac{dp}{dx} H} \frac{\pi^{1/2} \text{erf}\left(i \frac{\lambda \frac{dp}{dx} H}{\eta} \sqrt{2\epsilon}\right)}{i\sqrt{2\epsilon}} \right) \quad (3.31)$$

o que dá uma equação transcendente implícita para  $X \equiv U_N/U = (-dp/dx)H^2/3\eta U$ :

$$1 = \frac{3}{2} X \frac{\exp(bX^2)}{bX^2} \left(1 + \frac{i \pi^{1/2} \exp(-bX^2) \text{erf}(ib^{1/2} X)}{2b^{1/2} X}\right) \quad (3.32)$$

com:  $b = 18\epsilon De^2$ .

Desta vez não é possível arranjar uma expressão analítica para a solução desta equação pelo que se torna necessário recorrer a um método numérico. A solução está representada na Fig. 3.3 (linhas com símbolos redondos) sendo pouco diferente da solução anterior do caso PTT-linear. O perfil de velocidade (3.30) pode ser escrito de forma adimensional, uma vez conhecido  $X$ , vindo:

$$\frac{u(y)}{U} = 1.5 X \frac{\exp(bX^2)}{bX^2} \left(1 - \exp\left(-bX^2 \left(1 - \left(\frac{y}{H}\right)^2\right)\right)\right) \quad (3.33)$$

Os perfis das componentes do tensor das tensões continuam a ser dados por (3.23) e (3.24) pois não dependem directamente da função  $f(\tau_{kk})$ , embora obviamente o valor de  $X$  dependa de  $f()$  e agora seja diferente, vindo dado pela solução de (3.32) em vez de (3.21).

A Fig. 3.4 mostra um perfil de velocidade para  $\epsilon = 0.1$  e  $De = 2$ , sendo comparados os 2 modelos: PTT linear e exponencial. Como se vê, apesar das expressões que representam a solução serem diferentes, as curvas não diferem muito.

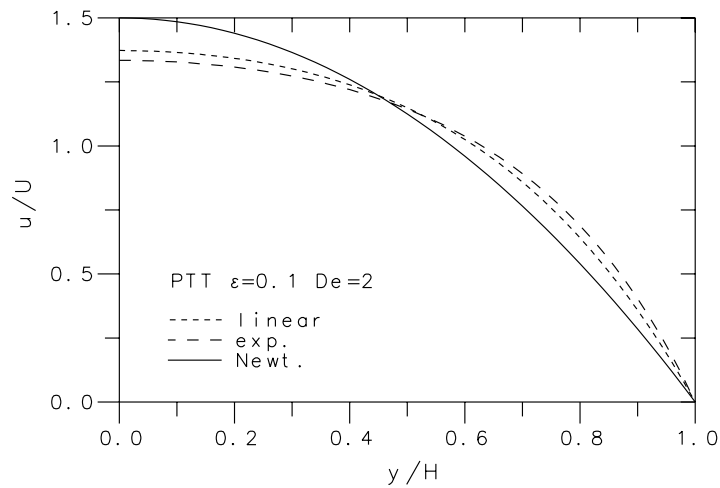


Fig. 3.4 Efeito do modelo PTT, linear e exponencial, sobre o perfil de velocidade em canal para  $De = 2$  e  $\epsilon = 0.1$ .

## 4. SOLUÇÃO DE ESCOAMENTO AXIAL AO LONGO DUM ESPAÇO ANULAR

### 4.1 Introdução

Nesta secção considera-se o escoamento laminar dum fluido viscoelástico no espaço anular entre dois cilindros concêntricos, de raios  $R_i$  e  $R_o$ , com separação  $\delta = R_o - R_i$ . Esta geometria é relevante em perfuração de poços de petróleo ou gás natural, onde a mistura de lama, óleo e rochas partidas que se desloca no espaço entre a broca e as paredes do furo apresenta características não-Newtonianas e velocidades que garantem regime laminar. Para ser possível obter uma solução analítica vai ser considerado o caso sem excentricidade e sem rotação do cilindro interior, de forma que o escoamento é axial ao longo dos cilindros, sendo assumido como completamente desenvolvido. O fluido segue o modelo constitutivo PTT-linear dado anteriormente.

### 4.2 Equações de Partida

As equações a resolver, em coordenadas cilíndricas e depois das simplificações já invocadas anteriormente, são a equação da quantidade de movimento axial (de Eq. 2.32):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{xr}) = \frac{dp}{dx} \quad (4.1)$$

e a equação constitutiva para as duas componentes não nulas da tensão (de Eqs. 3.8 e 3.10):

$$\tau_{xr} = \frac{\eta}{1 + (\epsilon \lambda / \eta) \tau_{xx}} \frac{du}{dr} \quad (4.2)$$

$$\tau_{xx} = \frac{2\lambda\eta}{(1 + (\epsilon \lambda / \eta) \tau_{xx})^2} \left( \frac{du}{dr} \right)^2 \quad (4.3)$$

As condições fronteira naturais são as de não-eskorregamento nas paredes do cilindro interior e exterior,  $u = 0$  para  $r = R_i$  e  $r = R_o$ . Para facilitar a dedução utiliza-se uma condição adicional (ou secundária):  $\tau_{xr} = 0$  em  $r = R_*$ . Os números adimensionais relevantes são os de Deborah, definido como  $De \equiv \lambda U / \delta$ , e Reynolds  $Re \equiv \rho U 2\delta / \eta$ , sendo ainda necessário considerar o parâmetro adimensional  $k = R_i / R_o$  que representa uma razão de raios. A velocidade média é obtida do caudal volumétrico,  $U = \dot{Q} / \pi(R_o^2 - R_i^2)$ , e uma escala de velocidades é definida como:

$$U_c = \frac{-(\frac{dp}{dx}) \delta^2}{8\eta} \quad (4.4)$$

de forma que  $X \equiv U_c / U$  vai representar o gradiente de pressão adimensional, tal como nas secções anteriores.

### 4.3 Dedução

A tensão de corte vai ser obtida da Eq. (4.1). Dividindo a Eq. (4.3) pelo quadrado de (4.2) obtem-se uma expressão para a tensão normal:

$$\tau_{xx} = \frac{2\lambda}{\eta} \tau_{xr}^2 \quad (4.5)$$

O perfil de velocidade virá da integração do gradiente de velocidade dado explicitamente por um re-arranjo da eq. (4.2):

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{\eta} \left( 1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta} \tau_{xx} \right) \tau_{xr} \quad (4.6)$$

A integração de (4.1) é imediata e dá:

$$\tau_{xr} = - \frac{dp}{dx} \frac{R_*}{2} \left( \frac{R_*}{r} - \frac{r}{R_*} \right) \quad (4.7)$$

garantindo que  $\tau_{xr} = 0$  para  $r = R_*$  de acordo com a condição fronteira secundária. O valor de  $R_*$  terá de ser obtido da segunda condição fronteira natural, sendo tratada mais adiante. Adimensionalizando tensões com  $\eta U / \delta$  e distância com  $\delta$  (denotando  $\xi \equiv r / \delta$  e  $\xi_* \equiv R_* / \delta$ ), podemos escrever as expressões para as tensões como:

$$T_{rx} \equiv \frac{\tau_{rx}}{\eta \frac{U}{\delta}} = 4 \xi_* X \left( \frac{\xi_*}{\xi} - \frac{\xi}{\xi_*} \right) \quad (4.8)$$

$$T_{xx} \equiv \frac{\tau_{xx}}{\eta \frac{U}{\delta}} = 32 De \xi_*^2 X^2 \left( \frac{\xi_*}{\xi} - \frac{\xi}{\xi_*} \right)^2 \quad (4.9)$$

e o gradiente de velocidade:

$$\frac{d u / U}{d y} = 4 \xi_* X \left( \frac{\xi_*}{\xi} - \frac{\xi}{\xi_*} \right) \left( 1 + 2 \epsilon De^2 \left( 4 \xi_* X \left( \frac{\xi_*}{\xi} - \frac{\xi}{\xi_*} \right) \right)^2 \right) \quad (4.10)$$

Esta equação pode ser integrada usando a 1ª condição fronteira natural ( $u = 0$  em  $r = R_i$ , isto é em  $\xi = k / (1 - k)$ ), obtendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{u}{U} = 4 X \xi_*^2 \left\{ \left( \ln \frac{\xi(1-k)}{k} - \frac{\xi^2 - [k/(1-k)]^2}{2 \xi_*^2} \right) - 32 \epsilon De^2 X^2 \xi_*^2 \left( 3 \ln \frac{\xi(1-k)}{k} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\xi^2 - [k/(1-k)]^2}{2 \xi_*^2} \left[ \frac{\xi^2 + [k/(1-k)]^2}{2 \xi_*^2} - 3 \right] + \frac{\xi_*^2}{2} \left[ \frac{1}{\xi^2} - \frac{(1-k)^2}{k^2} \right] \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nesta altura dispomos de equações para o perfil de velocidade (Eq. 4.11), de tensão de corte (Eq. 4.8) e de tensão normal (Eq. 4.9). Nestas aparecem no entanto duas incógnitas

adicionais,  $X = U_c/U$  e  $\xi_* = R_*/\delta$ , que é necessário determinar. No problema directo, em que o gradiente de pressão  $dp/dx$  é dado,  $X$  não representa uma incógnita mas sim um parâmetro conhecido, e assim vem facilitar a solução exacta do problema.

A posição radial do ponto de tensão de corte nula,  $\xi_*$ , é determinada aplicando a 2ª condição fronteira ao perfil de velocidade,  $u/U = 0$  para  $r = R_o$  ou seja, para  $\xi = 1/(1-k)$ . Fazendo isso à Eq. (4.11) e juntando os termos nas várias potências de  $\xi_*$  obtemos uma equação cúbica para  $\xi_*^2 \equiv Y$ :

$$Y^3 + a_1 Y^2 + a_2 Y + a_3 = 0 \quad (4.12)$$

com:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{6 \ln k}{(1-k^2)((1/k)-1)^2} \\ a_2 &= \frac{3k^2}{(1-k)^4} - \frac{2 \ln k}{(32\epsilon D e^2 X^2)(1-k)^2((1/k)^2-1)} \\ a_3 &= -\frac{k^2}{(1-k)^4} \left( \frac{1}{32\epsilon D e^2 X^2} + \frac{1+k^2}{2(1-k)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para o problema inverso em que o caudal é conhecido, o parâmetro  $X$  é obtido da definição da velocidade média no espaço anular:

$$U = \frac{1}{(R_o^2 - R_i^2)\pi} \int_{R_i}^{R_o} u(r) 2\pi r dr = \frac{2(1-k)}{(1+k)} \int_{k/(1-k)}^{1/(1-k)} u(\xi) \xi d\xi \quad (4.14)$$

Introduzindo (4.11) e efectuando a integração obtem-se a seguinte equação cúbica para  $X$ :

$$\frac{1}{\xi_*^2 \left( \frac{8(1-k)}{(1+k)} \right)} = I_1 X - 32\epsilon D e^2 \xi_*^2 I_2 X^3 \quad (4.15)$$

com:

$$I_1 = \int_{k/(1-k)}^{1/(1-k)} \left( \ln \frac{\xi(1-k)}{k} - \frac{\xi^2 - [k/(1-k)]^2}{2\xi_*^2} \right) \xi d\xi = \quad (4.16a)$$

$$= \frac{\ln(\frac{1}{k})}{2(k-1)^2} + \frac{(k+1)(2\xi_*^2(k-1)-k-1)}{8\xi_*^2(k-1)^2},$$

e

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{k/(1-k)}^{1/(1-k)} \left( 3 \ln \frac{\xi(1-k)}{k} + \frac{\xi^2 - [k/(1-k)]^2}{2\xi_*^2} \left[ \frac{\xi^2 + [k/(1-k)]^2}{2\xi_*^2} - 3 \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\xi_*^2}{2} \left[ \frac{1}{\xi^2} - \frac{(1-k)^2}{k^2} \right] \right) \xi d\xi = \\
&= \left( \frac{\xi_*^2}{2} + \frac{3}{2(k-1)^2} \right) \ln \frac{1}{k} + \\
&\quad \frac{(1+k) \left( 6\xi_*^6(k-1)^5 + 18\xi_*^4 k^2 (k-1)^3 - 9\xi_*^2 k^2 (k-1)^2 (k+1) + k^2 (k+1)(2k^2+1) \right)}{24\xi_*^4 k^2 (k-1)^4}
\end{aligned} \tag{4.16b}$$

Observe-se que nestas equações aparece  $\xi_*$ , e que nas equações (4.12-13) aparecia  $X$ , pelo que a solução deste problema inverso vai requerer iteração numérica entre as Eqs. (4.12) e (4.15). Assumindo um valor de partida para  $\xi_*$ , por exemplo igual ao valor Newtoniano, começa-se por resolver a Eq. (4.15) em ordem a  $X$ . Com este valor de  $X$ , resolve-se a Eq. (4.12) de forma a se obter um novo valor de  $\xi_*$ . Este processo é continuado até aos valores de  $\xi_*$  e  $X$  ficarem aproximadamente constantes, ou seja, até haver convergência deste processo iterativo simples. Na prática verifica-se que algumas (poucas) iterações são suficientes para que isso aconteça (tipicamente de 4 a 6).

#### 4.4 Resultados

A Fig. 4.1 apresenta alguns perfis de velocidade, para valores crescentes de  $De$  e para valores fixos de  $k = 0.5$  e  $\epsilon = 0.25$ . Como se vê, para  $De = 0.1$  o perfil segue de perto o resultado Newtoniano mas, à medida que a elasticidade aumenta, o perfil torna-se mais cheio reflectindo o efeito de *shear-thinning* do modelo viscoelástico.

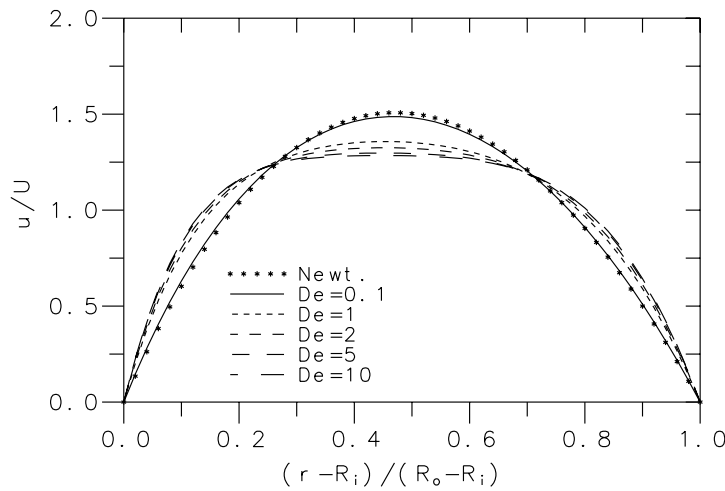


Fig. 4.1 Perfis de velocidade para vários  $De$  (com  $\epsilon = 0.25$  e  $k = 0.5$ ).



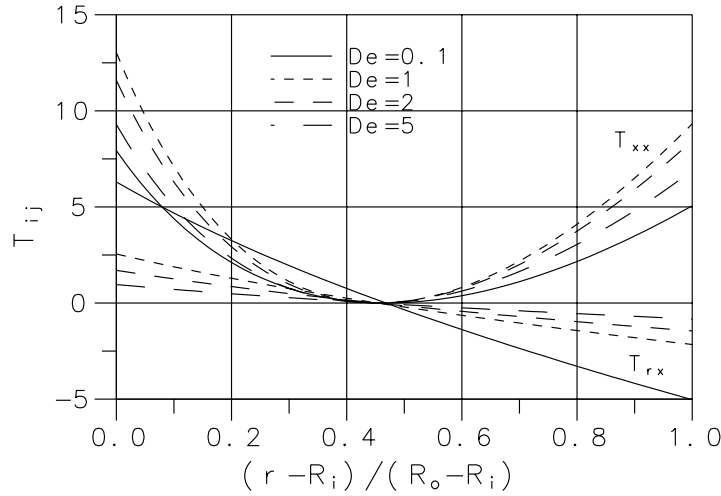


Fig. 4.2 Perfis das tensões de corte e normal ( $T_{ij} = \tau_{ij}/(\eta U/\delta)$ ) para vários  $De$  (com  $\epsilon = 0.25$  e  $k = 0.5$ ).

As correspondentes variações de tensão são mostradas na Fig. 4.2. As tensões normais são grandes perto das paredes dos cilindros interior e exterior, e observa-se o mesmo efeito de não-monotonicidade visto antes —  $\tau_{xx}$  é máximo para  $De \sim 1$  e depois decresce. Se as tensões fossem normalizadas com a tensão de corte na parede, esse efeito desapareceria.

#### 4.5 Resultados Integrais

Em operações de perfuração de poços de petróleo, e noutras aplicações de engenharia, um dos parâmetros de maior interesse é o factor de atrito nas paredes, que permite calcular a potência de bombagem necessária. O factor de Fanning é definido por:

$$f \equiv \frac{\Delta p}{4(L/D_H)(\rho U^2/2)} \quad (4.17)$$

onde  $\Delta p$  é a perda de pressão numa distância  $L$  (com  $\Delta p/L$  igual a  $-dp/dx$ ) e o diâmetro hidráulico para o espaço anular vem dado por  $D_H = 4A/P = 4(\pi(R_o^2 - R_i^2))/2\pi(R_i + R_o) = 2\delta$ . Substituindo na definição (4.17), obtemos:

$$f = \frac{-(dp/dx) \delta}{\rho U^2} = \frac{8\eta U_c}{\rho U^2 \delta}$$

em que foi utilizada a definição da velocidade característica dada pela Eq. (4.4). É conveniente fazer aparecer a número de Reynolds, definido como  $Re = \rho U 2\delta/\eta$ , de forma que a expressão vem finalmente:

$$f Re = 16 \frac{U_c}{U} = 16 X \quad (4.18)$$

com  $X$  dado pela solução de (4.15). Para o caso Newtoniano é fácil deduzir que:

$$(fRe)_N = 16 \left( \frac{1+k^2}{1-k^2} - \frac{1+k}{1-k} \frac{1}{\ln 1/k} \right)^{-1} \quad (4.19)$$

uma expressão dada por Bird et al (1960) (p. 53).

O factor  $fRe$  parece depender de ambos  $\epsilon^{1/2} De$  e  $k$  (vide 4.15), no entanto quando se representa num gráfico a razão  $fRe/(fRe)_N$  versus  $\epsilon^{1/2} De$  vê-se que não há dependência em  $k$  (ver Fig. 4.3). Para maior elasticidade e “extensibilidade”, sendo esta medida por  $\epsilon$ , observa-se desta figura que a fricção nas paredes diminui – uma consequência do efeito de *shear-thinning*. Tem interesse verificar que para outras escolhas de escala de comprimento (por ex.,  $R_i$  em vez de  $\delta$ , implicando  $De_i = \lambda U/R_i$  em vez de  $De = \lambda U/\delta$ ) aparece uma dependência de  $fRe/(fRe)_N$  em  $k$ , como se vê da Fig. 4.4.

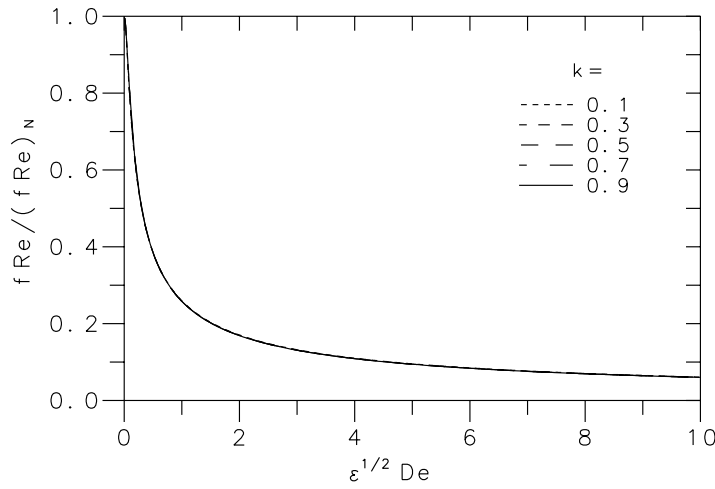


Fig. 4.3 Variação da razão entre o coeficiente de fricção viscoelástico e Newtoniano com a elasticidade/extensibilidade (medida por  $\epsilon^{1/2} De$ ).

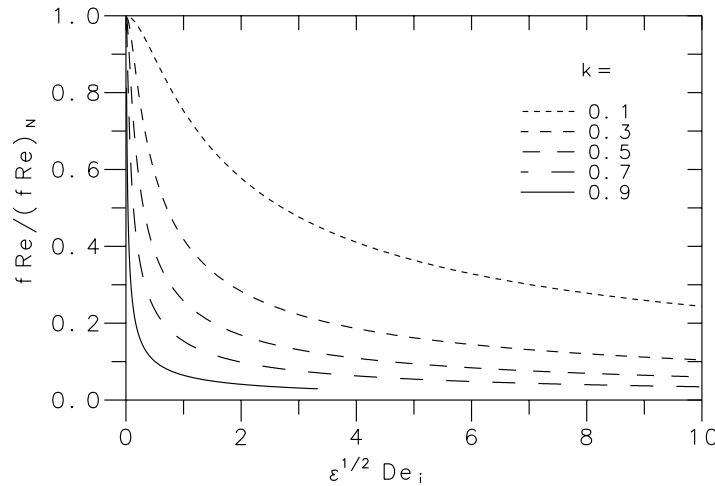


Fig. 4.4 Efeito da escolha da escala de comprimento na definição de  $De$  ( $De_i \equiv \lambda U/R_i$ ); comparar com Fig. 4.3.

## 5. UM CASO COM TRANSFERÊNCIA DE CALOR (CONVECÇÃO FORÇADA EM TUBO)

### 5.1 Definição do Problema e Hipótese Simplificativas

Neste último problema vamos considerar um caso em que além das equações dinâmicas é necessário resolver a equação da energia. Trata-se do problema de convecção forçada dentro dum tubo circular em que se escoia um fluido viscoelástico que obedece ao modelo PTT-linear, sendo aplicado um fluxo de calor uniforme (axial e azimutalmente) através das paredes. Vai considerar-se a situação em que tanto o campo de velocidade como o de temperatura estão completamente desenvolvidos, o que implica um gradiente de temperatura independente da posição axial  $x$  ( $\partial T/\partial x \equiv dT/dx$  é constante). Adicionalmente vai admitir-se que as propriedades físicas do fluido ( $\rho$ ,  $c_p$ ,  $k$  e  $\mu$ ) são constantes (i.e. independentes da temperatura) o que, em conjunto com o facto de não existirem efeitos de convecção natural, tem a importante implicação que o campo de velocidade é independente do campo de temperatura. Ou seja, as variações de velocidade e tensão através da secção do tubo são as mesmas já calculadas na secção 3.3.2, e só necessitamos de obter agora a variação da temperatura.

### 5.2 Equações de Partida

Para a situação de desenvolvimento completo e usando coordenadas cilíndricas ( $r$ ,  $\theta$ ,  $x$ ) a equação da energia reduz-se a:

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \Phi \quad (5.1)$$

onde  $\Phi$  representa a função de dissipação ( $\Phi \equiv \tau_{ij} \partial u_i / \partial x_j$ ) que fica reduzida a

$$\Phi = \tau_{xr} \frac{du}{dr} \quad (5.2)$$

As condições fronteira relevantes são de fluxo de calor nulo no eixo (reflectindo a condição de axissimetria):

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \text{para } r = 0 \quad (5.3)$$

e fluxo de calor imposto na parede:

$$\dot{q}_w = -k \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \text{para } r = R \quad (5.4)$$

Note-se que  $\dot{q}_w$  vem negativo quando o fluxo de calor está a “entrar” no tubo.

O perfil de velocidade é dado pela Eq. (3.25), a taxa de deformação (gradiente de velocidade) pela Eq. (3.17), e a tensão de corte pela Eq. (3.28). Nota-se que  $T = T(x, r)$ , mas  $\partial T/\partial x$  é constante (não depende de  $r$ ) em consequência do balanço integral induzido pela Eq. (5.1), de modo que iremos escrever  $dT/dx$ .

### 5.3 Dedução

Depois de se inserirem os perfis de velocidade e tensão de corte nas Eqs. (5.1) e (5.2), seguido de integração sujeita à condição fronteira (5.3), obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} = & \frac{2RU_N}{\alpha} \frac{dT}{dx} \left( \frac{(1+a)}{2} \frac{r}{R} - \frac{1}{4} \left( \frac{r}{R} \right)^3 - \frac{a}{6} \left( \frac{r}{R} \right)^5 \right) - \\ & - \frac{16\eta U_N^2}{kR} \left( \frac{1}{4} \left( \frac{r}{R} \right)^3 + \frac{a}{3} \left( \frac{r}{R} \right)^5 \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

com difusividade térmica  $\alpha = k/\rho c_p$  e parâmetro de elasticidade/extensibilidade

$$a = 16 \epsilon D e^2 \left( \frac{U_N}{U} \right)^2 \quad (5.6)$$

Utilizando temporariamente a temperatura no eixo como condição fronteira,  $T_c$ , podemos integrar uma vez mais a Eq. (5.5) para obter o perfil de temperatura:

$$\begin{aligned} T - T_c = & \frac{2R^2 U_N}{\alpha} \frac{dT}{dx} \left( \frac{1+a}{4} \left( \frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{r}{R} \right)^4 - \frac{a}{36} \left( \frac{r}{R} \right)^6 \right) - \\ & - \frac{16\eta U_N^2}{k} \left( \frac{1}{16} \left( \frac{r}{R} \right)^4 + \frac{a}{18} \left( \frac{r}{R} \right)^6 \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Para  $r = R$  obtemos a temperatura na parede:

$$T_w - T_c = \frac{R^2 U_N}{2\alpha} \frac{dT}{dx} \left( \frac{3}{4} + \frac{8}{9} a \right) - \frac{\eta U_N^2}{k} \left( 1 + \frac{8}{9} a \right) \quad (5.8)$$

Integrando a Eq. (5.7) obtemos a temperatura média na secção do tubo:

$$\begin{aligned} \bar{T} & \equiv \frac{\int_0^R 2\pi r u T dr}{\int_0^R 2\pi r u dr} \Rightarrow \\ \bar{T} - T_c & = \frac{1}{1+\frac{4}{3}a} \left\{ \frac{R^2 U_N}{\alpha} \frac{dT}{dx} \left( \frac{13}{54} a^2 + \frac{17}{45} a + \frac{7}{48} \right) - \frac{\eta U_N^2}{3k} \left( \frac{4}{9} a^2 + \frac{16}{15} a + \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde se usou a relação

$$U = U_N \left( 1 + \frac{4}{3} a \right) \quad (5.10)$$

baseada nas Eqs. (3.26) e (5.6).

Nestas expressões aparecem termos em  $\eta U_N^2$  e em  $U_N dT/dx$  que devem ser escritos em função dos parâmetros conhecidos  $\dot{q}_w$  e  $U$ . Em termos adimensionais os parâmetros independentes são o parâmetro elasticidade/extensibilidade  $a$ , e o número de Brinkman que mede a magnitude da dissipação viscosa:

$$Br = \frac{\eta U^2}{2R\dot{q}_w} \quad (5.11)$$

Usando (5.10) podemos escrever:

$$\eta U_N^2 = \frac{2R\dot{q}_w Br}{(1 + \frac{4}{3}a)^2} \quad (5.12)$$

Por sua vez a condição fronteira (5.4) aplicada à expressão do gradiente de temperatura (5.5) permite obter:

$$\dot{q}_w = \left( \frac{4\eta U_N^2}{R} - \frac{k U_N R}{2\alpha} \frac{dT}{dx} \right) \left( 1 + \frac{4}{3}a \right) \quad (5.13)$$

ou seja

$$\frac{U_N R}{\alpha} \frac{dT}{dx} = \frac{2\dot{q}_w}{k} \frac{8Br - 1 - \frac{4}{3}a}{(1 + \frac{4}{3}a)^2} \quad (5.14)$$

Podemos agora substituir (5.12) e (5.14) nas anteriores expressões das várias temperaturas relevantes, para obter as expressões finais com mais interesse prático:

$$\frac{T_w - T_c}{\dot{q}_w R/k} = \frac{4Br - \frac{3}{4} - \frac{8}{9}a}{1 + \frac{4}{3}a} \quad (5.15)$$

$$\frac{\bar{T} - T_c}{\dot{q}_w R/k} = \frac{2Br}{1 + \frac{4}{3}a} - \frac{2(\frac{13}{54}a^2 + \frac{17}{45}a + \frac{7}{48})}{(1 + \frac{4}{3}a)^2} \quad (5.16)$$

e

$$\frac{\bar{T} - T_w}{\dot{q}_w R/k} = \frac{\frac{19}{27}a^2 + \frac{17}{15}a + \frac{11}{24}}{(1 + \frac{4}{3}a)^2} - \frac{2Br}{1 + \frac{4}{3}a} \quad (5.17)$$

Observe-se que agora as temperaturas estão adimensionalizadas com uma escala de temperatura conhecida,  $\dot{q}_w R/k$ , que é a escala natural do problema uma vez que  $\dot{q}_w$  é dado. A adimensionalização mais corrente, com  $\bar{T} - T_w$ , não é conveniente pois tanto  $\bar{T}$  como  $T_w$  são desconhecidos e variam com as condições fronteira.

O parâmetro integral resultante mais útil é o número de Nusselt definido da forma usual como:

$$Nu = \frac{2Rh}{k} = \frac{2R\dot{q}_w}{k(\bar{T} - T_w)} \quad (5.18)$$

Utilizando a Eq. (5.17), obtemos a expressão desejada:

$$Nu = \frac{(1 + \frac{4}{3}a)^2}{(\frac{19}{54}a^2 + \frac{17}{30}a + \frac{11}{48}) - Br(1 + \frac{4}{3}a)} \quad (5.19)$$

Alguns casos limite permitem verificar esta expressão; assim, para o caso sem elasticidade ( $a = 0$ ) e dissipação viscosa ( $Br = 0$ ), obtemos o valor  $Nu = 4.364$  dado em vários livros da especialidade (por ex. White 1991); se a dissipação não for desprezada, temos  $Nu = 48/(11 - 48Br)$  (de acordo com Schlichting 1968).

#### 5.4 Alguns Resultados

Quando as paredes do tubo estão a ser aquecidas (portanto  $\dot{q}_w$  é negativo devido à convenção de sinal e assim  $Br$  é também negativo), o número de Nusselt aumenta com a elasticidade, diminui com o parâmetro alongacional  $\epsilon$  e com o número de Brinkman, como se vê da Fig. 5.1 onde  $Nu$  é dado em função de  $De$  (abscissa), e  $\epsilon$  e  $Br$  aparecem como parâmetros. Para cada  $Br$ , o aumento de  $Nu$  com  $De$  relativamente ao caso sem elasticidade é mostrado na Fig. 5.2 (para um valor de  $\epsilon = 0.1$ ). Observa-se que esse aumento relativo é substancial e tende a acentuar-se com a dissipação viscosa. É importante frisar que se  $\epsilon = 0$  (fluido viscoelástico com extensibilidade infinita, tipo UCM) então o valor de  $Nu$  fica sempre igual ao valor Newtoniano ( $Nu_0$ ), qualquer que seja  $De$  (as propriedades térmicas do fluido tipo UCM são iguais às do fluido Newtoniano).

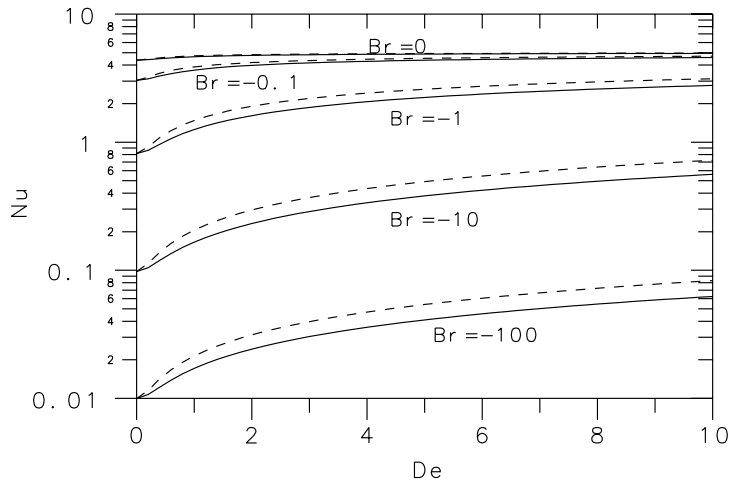


Fig. 5.1 Variação de  $Nu$  com  $De$ , para vários  $Br$  e  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.1$ -cheio;  $0.25$ -tracejado).  
Caso de aquecimento na parede.

A Fig. 5.3 mostra alguns perfis da temperatura adimensional, para valores fixos de  $De = 5$  e  $\epsilon = 0.1$ , e para vários  $Br$  positivos (que corresponde a arrefecimento na parede). É interessante observar que embora o propósito do arrefecimento na parede seja

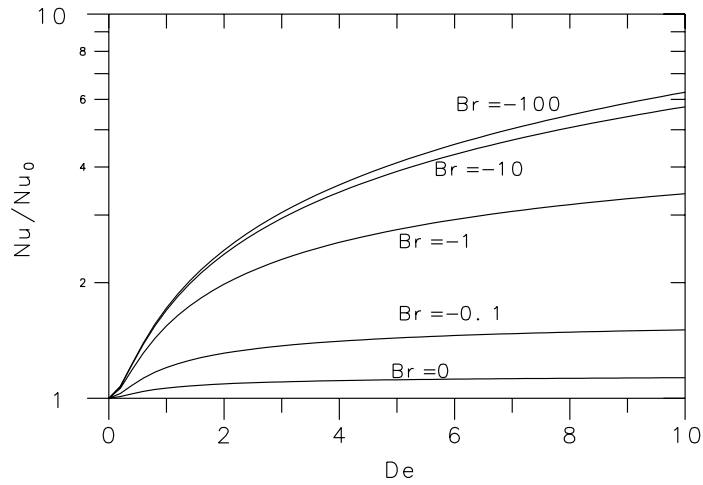


Fig. 5.2 Variação relativa de  $Nu$  com  $De$ , para vários  $Br$  e com  $\epsilon = 0.1$ .  $Nu_0$  corresponde a  $De = 0$ .

diminuir a temperatura média na secção do tubo, para  $Br$  maiores que um certo valor a temperatura parece aumentar (na figura isto acontece para as curvas com  $Br = 0.6$  e  $1.2$ ). Este fenómeno acontece porque o efeito de aquecimento interno devido à dissipação viscosa se sobrepõe ao efeito de arrefecimento na parede. O valor do número de Brinkman crítico acima do qual esta situação ocorre pode ser obtido de (5.14) igualando  $dT/dx$  a zero, obtendo-se:

$$Br_c = \frac{1}{8} + \frac{a}{6} \quad (5.20)$$

Na situação da Fig. 5.3 isto corresponde a  $Br_c = 0.516$ .

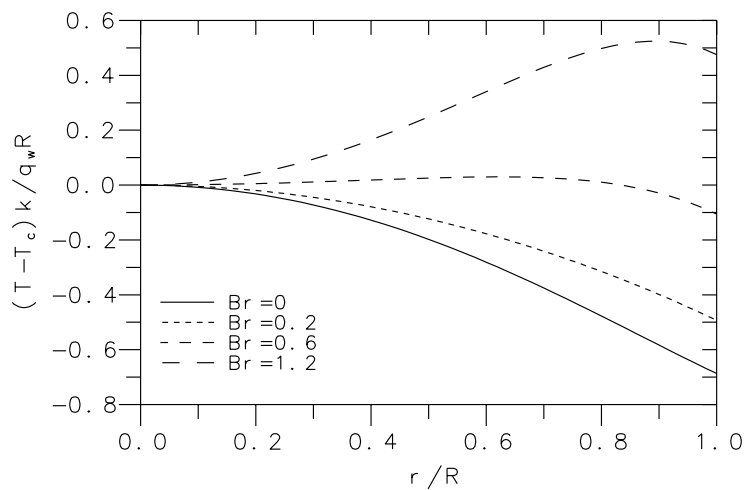


Fig. 5.3 Perfis da temperatura adimensional para vários  $Br$ , com  $De = 5$  e  $\epsilon = 0.1$ .

## 6. RESUMO E COMENTÁRIOS FINAIS

Várias soluções analíticas para problemas de escoamentos completamente desenvolvidos em condutas foram deduzidas a partir das equações de conservação fundamentais e as variações resultantes, da própria solução e de parâmetros integrais relacionados, foram representadas graficamente e comentadas em termos de interesse em aplicações de engenharia.

Foram considerados fluidos Newtonianos, que conduziram à solução clássica de Hagen-Poiseuille cuja dedução serviu fundamentalmente para demonstrar o tipo de análise utilizada, fluidos não-Newtonianos inelásticos com a viscosidade a variar em lei-de-potência, com solução dada em alguns livros da especialidade, e fluidos não-Newtonianos viscoelásticos. Este último tipo de fluido pode seguir modelos reológicos diversos tendo sido escolhido um particular, o modelo de Phan-Thien e Tanner (PTT) muito usado em aplicações várias e simulações numéricas. Os problemas envolvendo este fluido viscoelástico constituem a parte principal e mais inovadora do presente trabalho — foram considerados escoamentos completamente desenvolvidos em canal plano e em tubo circular, para 2 variantes do modelo: PTT-linear e PTT-exponencial; o modelo PTT-linear foi usado para o problema do escoamento axial num espaço anular concêntrico; finalmente, esse modelo foi utilizado no problema de escoamento com transferência de calor em tubo, para fluxo calorífico imposto na parede e considerando o efeito de dissipação viscosa.

É preciso notar que as soluções exactas aqui apresentadas, apesar do seu interesse prático, são representativas de uma só classe das soluções existentes e são relativamente simples de deduzir. Para fluidos Newtonianos, uma ótima resenha de soluções exactas para outras classes mais complexas de escoamentos é dada no capítulo 3 (págs. 104-217) do livro de White (1991) e no capítulo 7 (págs. 217-245) do livro de Currie (1993). Para fluidos não-Newtonianos inelásticos, do tipo Newtoniano-generalizado em que a variação da viscosidade pode seguir uma grande diversidade de modelos reológicos empíricos, a melhor fonte é o excelente livro de Bird, Armstrong e Hassager (1977), sobretudo nos exemplos e problemas do capítulo 5 (págs. 205-273). Uma boa introdução à “nova” ciência da Reologia é dada por Barnes, Hutton e Walters (1989), onde são discutidas as principais características dos fluidos não-Newtonianos, dos modelos Newtonianos-generalizados, e da viscoelasticidade em geral. Esse texto é recomendado uma vez que neste trabalho se consideram, essencialmente, problemas de escoamentos de fluidos não-Newtonianos. O número de soluções analíticas para escoamentos de fluidos viscoelásticos é muito mais reduzido, como se compreende facilmente dada a complexidade das equações constitutivas envolvidas, que normalmente requerem métodos numéricos para a sua resolução. Algumas soluções de problemas mais simples (obtenção de funções materiais e viscométricas) e de outros relativamente mais complexos que os presentes, são dadas nos capítulos 8 (Modelos co-rotacionais não-lineares, págs. 365-416) e 9 (Modelos Co-deformacionais, págs. 417-470) do livro de Bird et al (1977), sendo ainda recomendado o Volume 2 da mesma obra (“Vol. 2: Kinetic Theory”, com um autor adicional C.F. Curtiss).



## **AGRADECIMENTOS**

O autor deseja expressar agradecimentos especiais ao Professor Fernando T. Pinho, da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, com quem trabalhou na dedução teórica de muitos dos resultados aqui apresentados.

## **BIBLIOGRAFIA e REFERÊNCIAS**

- H.A. Barnes, J.F. Hutton e K. Walters, “An Introduction to Rheology”, Elsevier (1989).
- R.B. Bird, W.E. Stewart e E.N. Lightfoot, “Transport Phenomena”, John Wiley and Sons, New York (1960).
- R.B. Bird, R.C. Armstrong e O. Hassager, “Dynamics of Polymeric Liquids. Volume 1: Fluid Mechanics”, John Wiley and Sons, New York (1977).
- I.G. Currie, “Fundamental Mechanics of Fluids”, 2nd ed., McGraw-Hill (1993).
- J.A. Liggett, “Fluid Mechanics”, McGraw-Hill (1994).
- N. Phan-Thien e R.I. Tanner, “A new constitutive equation derived from network theory”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **2**, 353-365 (1977).
- H. Schlichting, “Boundary-Layer Theory”, 6th ed., McGraw-Hill, New York (1968).
- R.K. Shah e A.L. London, “Laminar Flow Forced Convection in Ducts”, Academic Press, New York (1978).
- F.M. White, “Viscous Fluid Flow”, 2nd ed., McGraw-Hill (1991).