

Escoamento Viscoelástico num “T” Bidimensional: Estudo da Variação da Elasticidade

Helder Miguel Matos^{1*}, Manuel António Alves² e Paulo Jorge Oliveira¹

¹ Departamento de Engenharia Electromecânica, Unidade de Materiais Têxteis e Papeleiros,
Universidade da Beira Interior, 6201-001 Covilhã

² Departamento de Engenharia Química, CEFT, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto,
Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto

e-mail: heldermiguelmm@hotmail.com, mmalves@fe.up.pt, pipo@ubi.pt

Resumo — Neste estudo procedeu-se à simulação do escoamento de fluidos viscoelásticos, como é o caso do sangue, numa bifurcação de 90°, com o objectivo de estudar o seu comportamento com a variação da elasticidade do fluido, para diferentes razões entre a viscosidade do solvente e a viscosidade total. Pretendeu-se observar a variação do tamanho e intensidade das recirculações e a distribuição das tensões de corte na bifurcação, características que se sabe estarem associadas ao aparecimento de ateromas. Os resultados obtidos mostram a dependência das características do escoamento com a variação da elasticidade.

1. Introdução

Doenças como a aterosclerose e a trombose estão associadas ao escoamento no sistema circulatório humano, e encontram-se normalmente localizadas perto dos ramos secundários das bifurcações e na zona interna de menor curvatura das artérias [1]. O escoamento em bifurcações é complexo, desenvolvendo recirculações que segundo vários autores (e.g. [2]) são caracterizadas por possuírem tensões de corte baixas. Existe aí a possibilidade de se formarem coágulos devido à adesão das plaquetas arrastadas, dos glóbulos vermelhos e dos lipóides, resultando na formação de placas ateróticas ou ateromas e trombos. Neste tipo de geometria, surgem também zonas de elevada tensão de corte, onde pode ocorrer a danificação do endotélio dos vasos sanguíneos, tal como foi descrito em [3], conduzindo à diminuição do relaxamento da veia e doença aterosclerótica, assim como hemólise com a degradação dos glóbulos vermelhos e a indesejável libertação de hemoglobina na corrente sanguínea [4].

O presente trabalho provém do seguimento de outros estudos efectuados anteriormente por Miranda et al. [5,6], e por Matos et al. [7]; Miranda et al. estudou o comportamento do escoamento de um fluido newtoniano ou não newtoniano inelástico, em regime permanente e pulsante no mesmo tipo de geometria. Matos et al. [7] efectuou um estudo da dependência da solução numérica com o valor do passo no tempo utilizado, testando várias formulações para o cálculo das tensões e das velocidades nas faces dos volumes de controlo.

Neste trabalho pretende-se estudar o comportamento das recirculações no ramo principal e secundário e a

variação das tensões no escoamento em função da elasticidade, medida pelo número de Débora, uma vez que o sangue possui propriedades viscoelásticas, para diferentes razões entre a viscosidade do solvente e a viscosidade total b .

2. Equações Diferenciais

As equações que regem o escoamento são as que exprimem a conservação da massa e do momento linear,

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{r} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\tilde{\mathbf{N}}p + \tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{t} + \tilde{\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{h}_s \mathbf{D}) \quad (2)$$

Nestas equações \mathbf{u} é o vector velocidade, p é a pressão, \mathbf{r} é a massa volúmica do fluido, \mathbf{D} é o tensor da taxa de deformação e \mathbf{h}_s é a viscosidade do solvente. Neste estudo, a massa volúmica e a viscosidade total ($\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}_s + \mathbf{h}_p$, onde \mathbf{h}_p designa a viscosidade do polímero) são assumidas constantes.

A resolução da Eq. (2) impõe a necessidade de uma nova equação constitutiva referente à evolução do tensor das tensões \mathbf{t} . Para tal são utilizados dois modelos constitutivos da família FENE (*Finite Extensible Non-linear Elastic*) [8]: o modelo FENE-CR e o modelo FENE-MCR. No modelo FENE-CR proposto por Chilcott e Rallison [9], o tensor das tensões é expresso por:

$$\mathbf{t} + \mathbf{I} \left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{t}}{f(t)} \right) = 2\mathbf{h}_p \mathbf{D} \quad (3)$$

em que \mathbf{I} traduz o tempo de relaxação do fluido, o símbolo $\nabla \cdot$ representa a derivada convectiva superior de Oldroyd e a função $f(t)$ é dada por:

$$f(t) = \frac{L^2 + (\mathbf{I} / \mathbf{h}_p) \text{tr}(\mathbf{t})}{L^2 - 3} \quad (4)$$

em que L^2 representa o parâmetro de extensibilidade, que é mantido constante ao longo das simulações ($L^2 = 100$), e tr representa o operador traço. Se em

relação ao modelo anterior for imposta a simplificação $Df(t)/Dt \approx 0$, obtemos o modelo FENE-CR modificado (FENE-MCR), utilizado por Coates et al. [10], onde a equação constitutiva é dada por:

$$t + \frac{I}{f(t)} \nabla \cdot \mathbf{D} = 2\mathbf{h}_p \mathbf{D} \quad (5)$$

3. Método Numérico

As equações diferenciais descritas são discretizadas utilizando o método dos volumes finitos. Neste método as equações originais são integradas em cada volume de controlo dando origem a uma equação algébrica onde as incógnitas são os valores nodais das várias variáveis [11]. A integração é feita numa malha de volumes finitos com arranjo “colocado” das variáveis [12]: malhas não desfasadas, onde todas as variáveis são localizadas no centro dos volumes de controlo. Segue-se a técnica de Rhie e Chow [13] para evitar o desacoplamento entre a pressão e a velocidade neste tipo de malhas. Para o acoplamento entre a tensão e a velocidade é usado um processo idêntico ao descrito em Oliveira e Pinho [14]. Os termos difusivos e o termo gradiente de pressão na equação de conservação de movimento foram representados por diferenças centrais, de segunda ordem de precisão, enquanto que para os termos convectivos é usado o esquema de alta resolução CUBISTA desenvolvido por Alves et al. [15]. Este esquema possui boa precisão numérica e é muito robusto em relação à convergência iterativa no cálculo de escoamentos viscoelásticos.

O algoritmo utilizado é baseado no algoritmo SIMPLEC [16] que permite ligar os campos de velocidade e pressão, de forma a verificar-se a equação da continuidade em escoamentos no regime permanente. A convergência do processo iterativo é obtida quando os resíduos normalizados de todas as variáveis são inferiores a 10^{-8} .

Formulações Utilizadas

As formulações utilizadas são algumas das que foram testadas em Matos et al. [7], e que demonstraram ser independentes do valor do passo no tempo utilizado. Na formulação Tau-E são utilizados os dois modelos constitutivos FENE-MCR e FENE-CR, e na formulação com Interpolação Linear o modelo FENE-MCR. Em todas formulações o cálculo dos fluxos convectivos nas faces dos volumes de controlo é baseado em Oliveira [12], onde a expressão para o cálculo da velocidade na face do volume de controlo é dada por:

$$\tilde{u}_f = \frac{\overline{a_p u_p} - \overline{B_f \Delta p_f} + \overline{B \Delta p} - \frac{\mathbf{rV}}{\Delta t} u^0 + \frac{\mathbf{rV}}{\Delta t} \tilde{u}^0}{\left(a_0 + \frac{\mathbf{rV}}{\Delta t} \right)} \quad (6)$$

em que u_p traduz a velocidade no centro da célula P , B é uma área superficial, Δp uma diferença de

pressões, \mathbf{r} a massa volúmica, V é o volume da célula, t o tempo, Δt o passo no tempo e u^0 a velocidade no nível temporal (iteração) anterior. O sobrescrito (\sim) corresponde a interpolação especial feita na face da célula [13] ou a cálculo directo de diferenças de pressão, enquanto o sobrescrito $(-)$ corresponde a interpolação linear. Os coeficientes da equação discretizada são designados por a_f , a_0 é a soma dos coeficientes vizinhos ($a_0 = \sum a_f$), e a_p o coeficiente central ($a_p = a_0 + \mathbf{rV} / \Delta t$).

No que se refere aos cálculos das tensões nas faces dos volumes de controlo, a formulação Tau-E é dada por:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{t}}_{ij}) = & (\tilde{\mathbf{t}}_{ij})_f + \frac{1}{(1 + a_0^t / V_p)} \cdot \\ & \left[-\frac{1}{V_p} \left(\mathbf{h}_p B_{fi} [\Delta u_j]_f + \mathbf{h}_p B_{fj} [\Delta u_i]_f - \frac{2}{3} \mathbf{h}_p \sum_k B_{fk} [\Delta u_k]_f \mathbf{d}_{ij} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{V_f} \left(\mathbf{h}_p B_{fi} [\Delta u_j]_f + \mathbf{h}_p B_{fj} [\Delta u_i]_f - \frac{2}{3} \mathbf{h}_p \sum_k B_{fk} [\Delta u_k]_f \mathbf{d}_{ij} \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

onde B_{fi} é a componente i da área da superfície da célula alinhada com a direcção f , V_p e V_f correspondem aos volumes da célula centrada em P e da célula centrada na face f .

Na formulação com interpolações lineares a tensão na face do volume de controlo é dada por:

$$(\tilde{\mathbf{t}}_{ij}) = (\tilde{\mathbf{t}}_{ij}) \quad (8)$$

Em Matos et al. [7] é feita uma descrição mais detalhada das várias formulações utilizadas.

4. Geometria, Caracterização do Escoamento e Malha Computacional

A simulação numérica foi realizada nas condições descritas por Khodadadi et al. [17], para uma geometria em T com uma secção de área constante e rectangular, como está representado na figura 1.

O comprimento total segundo x é de 0.26 m, segundo y de 0.21 m e a altura dos canais (H) é igual a 0.01 m. A entrada do escoamento é feita no bloco 1 (B1) em $x = -3.5H$, onde é imposto um perfil de velocidades parabólico com velocidade média $u_1 = 0.0745$ m/s; as saídas são localizadas nos blocos 5 e 6 em $x = 22.5H$ e $y = 20.5H$, onde o escoamento se encontra completamente desenvolvido. À excepção da entrada e saída do escoamento, todos os planos da geometria coincidem com paredes sólidas nas quais é imposta a condição de não escorregamento.

Tal como em [17], a razão de extracção usada foi $Q_3 / Q_1 = 0.7$, onde Q_1 , Q_2 e Q_3 são os caudais volúmicos na entrada, na saída principal e na saída secundária, tal como identificado na figura 1. A imposição da relação de extracção constitui uma

condição de fronteira adicional para escoamentos em bifurcações de forma a garantir a unicidade da solução das equações. O número de Reynolds é calculado para as condições na entrada do escoamento, obtendo-se $Re = \rho u_1 H / \mu_0 = 102$.

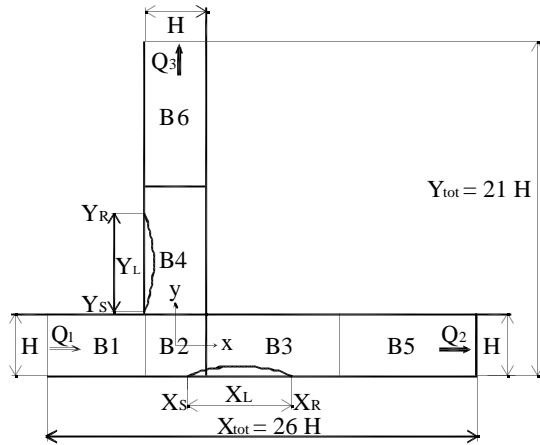


Fig. 1. Representação esquemática da geometria em estudo.

As simulações numéricas, foram realizadas para valores sucessivamente crescentes do número de Débora, partindo do caso newtoniano ($De=0$), até deixar de se obter convergência (iterativa) do algoritmo. O número de Débora é definido como $De = I u_1 / H$.

Para todos os escoamentos em estudo as características do fluido são as seguintes: massa volúmica $\rho = 1150 \text{ kg/m}^3$ e viscosidade $\mu_0 = 0.0084 \text{ Pa}\cdot\text{s}$; no caso de escoamentos viscoelásticos ($De \neq 0$) optou-se pela escolha de várias razões entre a viscosidade do solvente e a viscosidade total ($b = \mu_s / \mu_0$), nomeadamente a variar desde $b = 0.3$ a 0.9 . As viscosidades do solvente e do polímero para as diferentes razões de viscosidades são calculadas por $\mu_s = b \mu_0$ e $\mu_p = (1 - b) \mu_0$.

Devido à complexidade da geometria em questão, a malha do domínio de cálculo tem de ser constituída por mais do que um bloco. No presente trabalho optou-se pelo uso de 6 blocos estruturados (B1-B6) tal como representado na figura 1. A malha computacional é ortogonal mas não uniforme (utilizando uma progressão geométrica para o espaçamento Δx , $f_x = \Delta x_{i+1} / \Delta x_i$) de forma a concentrar mais células na zona da bifurcação por ser esta a zona mais crítica do escoamento onde se observam os gradientes mais elevados.

A malha computacional utilizada é constituída por 12800 volumes de controlo e as suas características encontram-se resumidas na Tabela 2. Esta malha é idêntica à que foi utilizada em [7], onde se procedeu ao estudo de refinamento de malha, utilizando a técnica de Richardson [18] para o cálculo do erro e da ordem de convergência, e onde se concluiu que era suficiente para que os cálculos em questão possuissem boa precisão numérica.

O valor do passo no tempo (Δt) utilizado no decorrer das várias simulações foi um parâmetro constante e igual a 0.08 (valor adimensionalizado pela razão (u_1 / H)), devido a ter sido este, o valor para o qual a versão Tau-E (CR) se mostrou mais versátil em Matos et al. [7].

TABELA I
RESUMO DAS CARACTERÍSTICAS DA MALHA COMPUTACIONAL

Bloco	Nº de células $NX \times NY$	Comprimento x/H	Comprimento y/H	f_x	f_y
B1	40×40	$-3.5 \rightarrow -0.5$	$-0.5 \rightarrow 0.5$	0.95260	1.00000
B2	40×40	$-0.5 \rightarrow 0.5$	$-0.5 \rightarrow 0.5$	1.00000	1.00000
B3	100×40	$0.5 \rightarrow 12.5$	$-0.5 \rightarrow 0.5$	1.02657	1.00000
B4	40×100	$-0.5 \rightarrow 0.5$	$0.5 \rightarrow 10.5$	1.00000	1.02385
B5	20×40	$12.5 \rightarrow 22.5$	$-0.5 \rightarrow 0.5$	1.06413	1.00000
B6	40×20	$-0.5 \rightarrow 0.5$	$10.5 \rightarrow 20.5$	1.00000	1.06413

Junto à bifurcação, tal como se ilustra na figura 1, surgem junto às paredes duas recirculações, uma vertical e uma horizontal, que são caracterizadas pelo seu início, onde existe um ponto de separação do escoamento X_s e Y_s para a recirculação horizontal e vertical, pelo ponto de recuperação do escoamento X_R e Y_R onde termina a recirculação e pelo comprimento das recirculações X_L e Y_L dados pela diferença entre os pontos de recuperação e separação.

4. Resultados e Discussão

Todos os resultados que se apresentam de seguida mostram variáveis adimensionais, usando para escala de comprimento a altura da conduta de entrada (H ; $Y = y/H$ e $X = x/H$), para escala de velocidade a velocidade média na entrada do escoamento (u_1) e para as tensões o valor da tensão de corte na parede à entrada do escoamento ($\tau_{w1} = 6\mu_0 u_1 / H$).

As figuras 2 e 3 fornecem os resultados relativos aos comprimentos de recirculação criados ao longo das direcções x e y , obtidos através de perfis de velocidade paralelos às paredes horizontal ($Y = -0.5$) e vertical ($X = -0.5$), para as várias formulações e razões de viscosidades consideradas.

As figuras 2 e 3 mostram que os resultados obtidos com as formulações Tau-E e Interpolação Linear são praticamente coincidentes. Os resultados obtidos através da formulação (Tau-E CR) para a recirculação horizontal (fig. 2) são idênticos aos obtidos com as restantes formulações para todas as razões de viscosidades, no entanto no caso da recirculação vertical (figura 3), a formulação Tau-E (CR) só apresenta resultados semelhantes para valores de Débora baixos. Para valores de Débora mais elevados e para razões de viscosidades menores ou iguais a 0.7 constata-se que o comprimento de recirculação vertical obtido com a formulação Tau-E CR é superior ao obtido pelas restantes formulações. A diferença máxima registada foi de 10.6 % no caso de $b = 0.7$ para $De = 3.2$. Para razões de viscosidades superiores a 0.7 observa-se um comportamento inverso

obtendo-se comprimentos de recirculação menores quando se utiliza a formulação Tau-E (CR); a diferença máxima obtida foi de 2.1 % para $De = 5.6$ e $b = 0.8$.

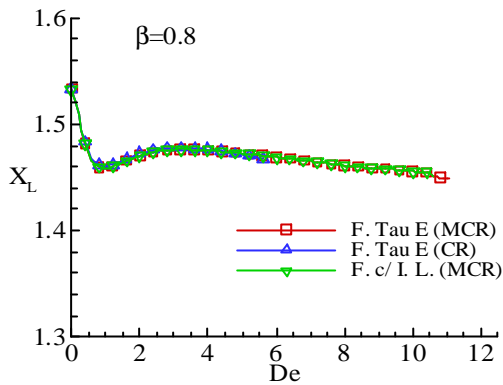


Fig. 2. Variação de X_L com De para $b = 0.8$.

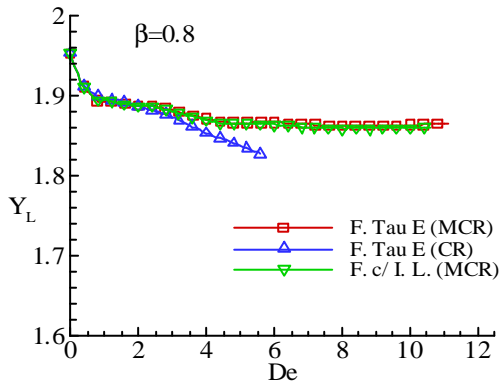
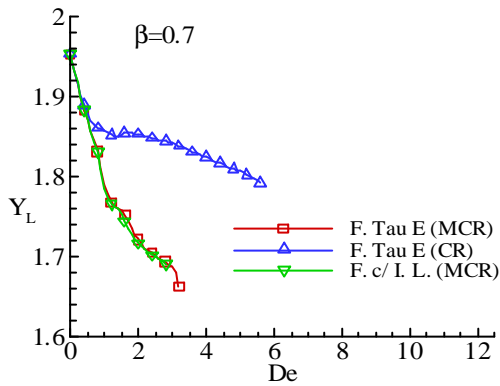


Fig. 3. Variação de Y_L com De para $b = 0.7$ e 0.8 .

A formulação Tau-E (CR) para $b \leq 0.7$ é mais versátil em relação ao valor de Débora máximo possível de ser simulado, enquanto que para valores de b superiores apresenta um comportamento inverso.

Como os resultados obtidos através das formulações Tau-E (MCR) e com Interpolação Linear (MCR) são praticamente coincidentes, na figura 4 e 5 é exibido apenas a variação do comprimento das recirculações horizontal (fig. 4) e vertical (fig. 5) com o número de Débora e com a razão de viscosidades para as

formulações Tau-E (MCR) e Tau-E (CR) separadamente.

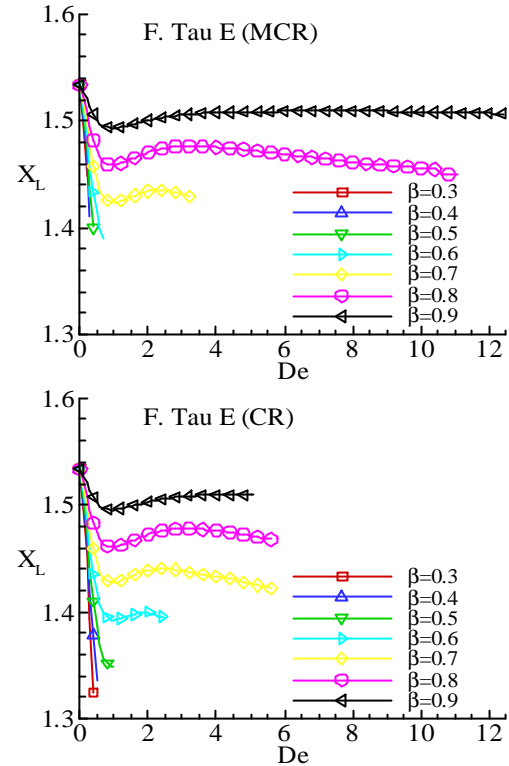


Fig. 4. Variação de X_L com De e b para os 2 modelos

Pela análise da figura 4, podemos constatar que os resultados obtidos para o comprimento da recirculação horizontal, com ambas as formulações apresentam um comportamento não monótono com o número de Débora; inicialmente decrescem com o número de Débora, até $De \approx 1.0$, seguindo-se um novo aumento e uma nova diminuição.

A evolução da variação do comprimento da recirculação vertical (fig. 5) é monótona e decresce com o aumento do número de Débora para ambas as formulações e razões de viscosidades consideradas. Das figuras 4 e 5 constata-se também que a magnitude de variação dos valores dos comprimentos de recirculação com o número de Débora é tanto maior quanto menor for o valor de b , o que é natural pois o caso $b = 1$ corresponde a viscosidade do polímero nula (caso newtoniano), onde a variação com o número de Débora não existe. O valor do número de Débora máximo possível de ser simulado varia com o valor da razão de viscosidades, sendo tanto maior quanto maior for a razão de viscosidades.

Na figura 6 são exibidas as linhas de corrente do escoamento com fluido FENEMCR para o caso de $De = 1$ e $b = 0.8$.

Pode observar-se as duas recirculações, no interior das quais ocorrem os valores máximo e mínimo da função de corrente, valores estes que correspondem à proporção de fluido que fica retido dentro de cada bolha de recirculação. A variação com De e b da proporção de

fluido na recirculação vertical ($y_{\max}-1$), e na recirculação horizontal (y_{\min}), é exibida na figura 7 para a formulação Tau-E (MCR).

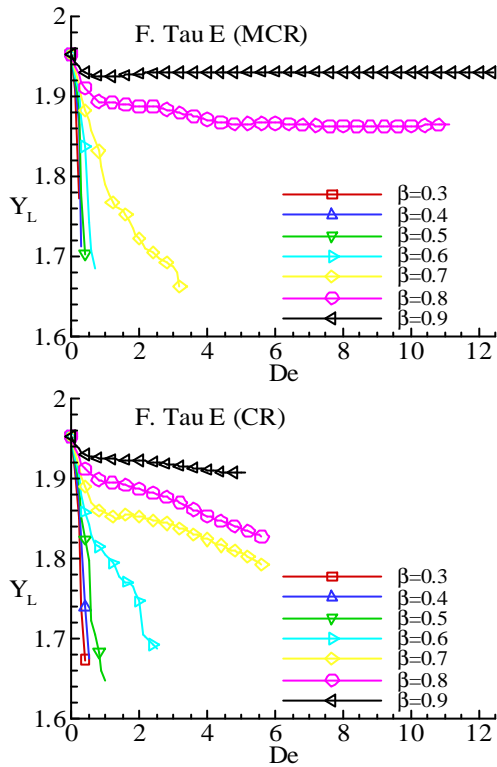


Fig. 5. Variação de Y_L com De e b para os 2 modelos.

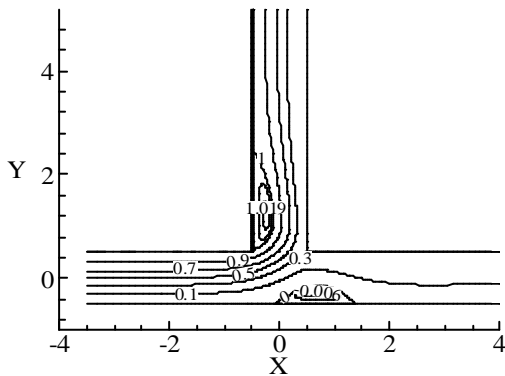


Fig. 6. Linhas de corrente para $De=1$ e $b=0.8$ com fluido FENE-MCR.

De forma semelhante ao andamento dos comprimentos de recirculação, esta figura mostra que a proporção de fluido no interior da recirculação horizontal (y_{\min}) também apresenta um comportamento não monótono, sendo a variação da magnitude tanto maior quanto menor for a razão de viscosidades b . No caso da bolha vertical, a intensidade de recirculação tende a diminuir com o aumento do número de Débora e a magnitude da variação é também maior para valores de b baixos. A

intensidade desta recirculação vertical ($y_{\max}-1$) é sempre superior à intensidade na recirculação horizontal (y_{\min}), sendo cerca de 5 vezes superior para $De=0$. Este facto poderá ser justificado pela razão de caudais adoptada, onde 70% do caudal se escoia através do ramo secundário.

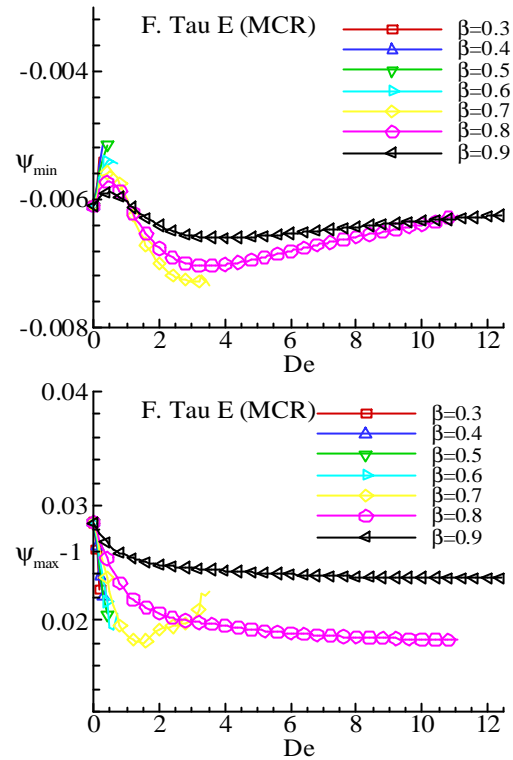


Fig. 7. Variação da intensidade das recirculações horizontal (y_{\min}) e vertical ($y_{\max}-1$) com De e b , para o FENE-MCR

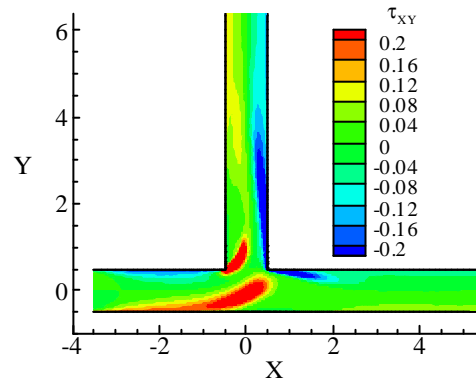


Fig. 8. Variação de t_{xy} na zona da bifurcação para $De=1$ e $b=0.8$, com FENE-MCR.

Foi referido anteriormente que no seio das recirculações as tensões de corte são muito baixas, existindo a possibilidade de se formarem coágulos. Este facto é visível na figura 8 onde as tensões de corte na zona das recirculações são praticamente nulas.

Neste tipo de escoamento observa-se também a existência de tensões de corte muito elevadas (em módulo) junto aos cantos reentrantes, onde pode ocorrer a danificação do endotélio dos vasos sanguíneos. Este fenómeno pode ser observado na figura 9 (condições idênticas às da figura 8) onde as tensões nos cantos reentrantes chegam a ser cinco vezes superiores (em módulo) à tensão de corte na parede à entrada do escoamento.

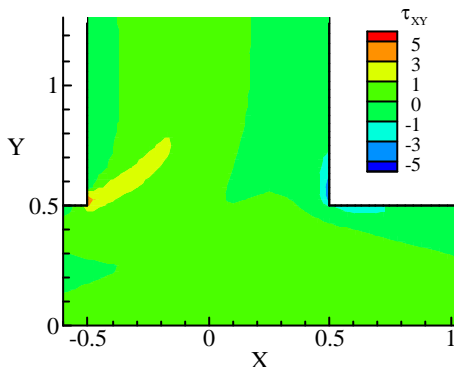


Fig. 9. Zoom da figura 8.

Conclusões

Foi efectuado um estudo numérico do escoamento numa bifurcação bidimensional utilizando fluidos não newtonianos viscoelásticos e fazendo variar a elasticidade através de De e b . Foram usadas várias formulações para o cálculo das tensões e das velocidades nas faces dos volumes de controlo, conjugadas com a utilização de dois modelos constitutivos, com o objectivo de investigar a sensibilidade dos resultados a essas variações.

No seguimento das conclusões obtidas em [7], constatou-se que de uma forma geral as formulações Tau-E e Interpolação Linear apresentam soluções semelhantes. Por outro lado o modelo FENE-CR apresenta resultados diferentes do modelo FENE-MCR no que diz respeito à recirculação vertical, não se registando diferenças nos resultados obtidos na zona da recirculação horizontal. Com o modelo FENE-CR é possível cobrir uma gama maior de De para $b \leq 0.7$, enquanto que para $b > 0.7$ a conclusão é inversa.

Constatou-se que os comprimentos e a intensidade de recirculação vertical diminuem com o aumento do número de Débora e com diminuição da razão de viscosidades. Já para a recirculação horizontal, o comprimento e a intensidade de recirculação têm uma variação não monótona com o aumento do número de Débora, para as várias razões de viscosidades estudadas. Para todas as variáveis analisadas, para as recirculações horizontal e vertical, constatou-se que a maior magnitude de variação ocorre sempre para baixos valores da razão de viscosidades, tendendo a existir uma variação mais suave com o aumento do número de Débora sempre que diminui a concentração do soluto que induz a elasticidade (os glóbulos vermelhos, no caso do sangue).

Agradecimentos

H.M. Matos agradece o apoio financeiro concedido pela FCT através da Bolsa de Doutoramento SFRH/BD/18062/2004. M.A. Alves agradece o apoio concedido pela FCT e FEDER ao abrigo do projecto POCI/EQU/59256/2004 e P.J. Oliveira o POCI/EME/58657/2004.

Referências

- [1] M.J. Thubrikar e F. Robicsek, "Pressure-induced arterial wall stress and atherosclerosis", *Annals of Thoracic Surgery*, No. 59, pp. 1594-1603, 1995.
- [2] C.G. Caro, J.M. Fitz-Gerald, e R.C. Schroter, "Atheroma and arterial wall shear observation, Correlation and proposal of a shear dependent mass transfer mechanism for atherogenesis", *Proc. Roy. Soc London Ser.B*, Vol. 177 (No. 1046), pp. 109-133, 1971.
- [3] E. Joris, T. Zand, e G. Majno, "Hydrodynamic injury of the endothelium in acute aortic stenosis", *Am. J. Pathol.*, No. 106, pp. 394-408, 1982.
- [4] D.Liepsch, S. Moravec, A.K. Rastogi e N.S.Vlachos, "Measurement and calculations of laminar flow in a ninety degree bifurcation", *J. Biomechanics*, No. 15, pp. 473-485, 1982.
- [5] A.I.G.P. Miranda, Modelação matemática de escoamentos não estacionários de fluidos complexos com vista a aplicações hemodinâmicas. Tese de Doutoramento, Departamento de Eng. Electromecânica, Universidade da Beira Interior, Fevereiro de 2007.
- [6] A.I.G.P. Miranda, P.J. Oliveira e F.T. Pinho, "Steady and unsteady laminar flows of Newtonian and generalized Newtonian fluids in a planar T-junction", *Int. J. Numer. Meth. Fluids* (in press), 2007.
- [7] H.M.H. Matos, M.A. Alves, e P.J. Oliveira, "Escoamento viscoelástico num "T" bidimensional" in *CMNE CLANCE 2007*, Porto 13 a 15 de Junho de 2007, p. 365.
- [8] R.B. Bird, O. Hassager, R.C. Armstrong, e C.F. Curtiss, *Dynamics of polymeric liquids: Kinetic theory*, John Wiley & Sons, Vol. II. (1987).
- [9] M.D. Chilcott e J.M. Rallison, "Creeping flow of dilute polymer solutions past cylinders and spheres", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, No. 29, pp. 381-432, 1988.
- [10] P.J. Coates, R.C. Armstrong, e R.A. Brown, "Calculation of steady state viscoelastic flow through axisymmetric contractions with the EEME formulation", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, No. 42, pp. 141-188, 1992.
- [11] S.V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere, Washington, DC, 1980.
- [12] P.J. Oliveira, Computer modelling of multidimensional multiphase flow and application to T junctions, Ph.D Thesis, Imperial College, University of London, 1992.
- [13] C.M. Rhie, e W.L. Chow, "A numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation", *AIAA J.*, No. 21, pp. 1525-1532, 1983.
- [14] P.J. Oliveira e F.T. Pinho, "Numerical procedure for the computation of fluid flow with arbitrary stress-strain relationships", *Numerical Heat Transf. Part. B*, No. 35, pp. 295-315, 1999.
- [15] M.A. Alves, P.J. Oliveira, F.T. Pinho, "A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, No. 41, pp. 47-75, 2003.
- [16] J.P. Van Doormaal, e G.D. Raithby, "Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows", *Numerical Heat Transf.* No. 7, pp. 147-163, 1984.
- [17] J.M. Khodadadi, N.S. Vlachos, D. Liepsch e S. Moravec, "LDA measurements and numerical prediction of pulsatile laminar flow in a 90-degree bifurcation", *J. Biomechanical Engng.* No. 110, pp. 129-136, 1988.
- [18] L.F. Richardson, "On the approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry", *Proc. Roy. Soc London Ser. A*, Vol. 83 (Nº 563), pp. 335-336, 1910.