

Estudo Numérico do Escoamento Viscoelástico numa Expansão Plana

Gerardo N. Rocha e Paulo J. Oliveira

Departamento de Engenharia Electromecânica, Unidade de Materiais Têxteis e Papeleiros

Universidade da Beira Interior

Calçada Fonte do Lameiro – Covilhã

Telf: +351 275 329 925; fax: +351 275 329 972; e-mail: gerardorocha@portugalmail.pt, pipo@ubi.pt

Resumo — O escoamento de fluidos viscoelásticos através de expansões planas assume, actualmente, um papel de relevo em diversas aplicações industriais. O objectivo deste trabalho prende-se com a análise numérica do comportamento do fluido viscoelástico numa expansão plana com razão 1:4. Os resultados apresentados são relativos à estrutura do escoamento, para os casos newtoniano e viscoelástico. Conclui-se que a presença de elasticidade provoca uma tendência para estabilizar o escoamento, atrasando o ponto crítico de transição do regime simétrico para o regime assimétrico.

1. Introdução

Actualmente, o escoamento de fluidos com propriedades viscoelásticas (efeitos viscoso e elástico) tem sido objecto de inúmeros estudos com vista a aplicações em geometrias envolvendo contracções ou expansões da secção transversal. Nas zonas onde surgem estas variações de secção, ocorrem alterações significativas do escoamento e das propriedades do fluido (quando este é viscoelástico). Este tipo de geometria é comum em várias aplicações industriais, tais como em máquinas de injeção e de extrusão de termoplásticos, no processamento de tintas e géis, entre outras aplicações e, como tal, tem sido ultimamente alvo de muita investigação.

Pode-se encontrar na literatura muitos trabalhos publicados, quer numéricos quer experimentais, que analisam o comportamento de fluidos newtonianos e viscoelásticos neste tipo de geometria. Destacam-se os trabalhos numéricos publicados por Battaglia *et al.* [1], Drikakis [2] e Oliveira [3], entre outros, os quais estudam a instabilidade do escoamento em expansões planas. Battaglia *et al.* [1] analisam o escoamento newtoniano em canais bidimensionais para várias razões de expansão. Os autores obtiveram, para uma razão de expansão de 1:4, o número de Reynolds crítico (Re_{cr}) igual a 35.8, para o fluido newtoniano. Eles estudaram o comportamento do escoamento em diversas razões de expansão (entre 1.5 e 7) e determinaram o número de Re_{cr} para cada um dos casos. Podemos concluir, dos resultados por eles obtidos, que à medida que aumenta a razão de expansão da geometria do escoamento o número de Re_{cr} diminui. Isto demonstra que a bifurcação do escoamento é antecipado à medida que a razão de expansão aumenta. Drikakis [2] analisa o fenómeno da bifurcação que ocorre em expansões planas para

escoamentos incompressíveis de fluidos newtonianos, tendo como principais objectivos avaliar com precisão o valor do número de Re_{cr} . Para uma expansão plana, com razão de expansão de 1:4, o valor do número Re_{cr} que é obtido no trabalho de Drikakis [2] é $Re_{cr} = 35.3$. Destes dois trabalhos, verifica-se que o número de Re_{cr} está compreendido entre 35.3 e 35.8. Oliveira [3] apresenta resultados numéricos para o escoamento viscoelástico numa expansão plana, com razão de expansão 1:3. Os resultados obtidos demonstraram que existe diferença entre a transição, de escoamento simétrico para o escoamento assimétrico, para fluidos newtonianos e viscoelásticos. Pode-se concluir que a presença de efeitos viscoelásticos atrasam o ponto crítico de transição.

Em trabalhos experimentais, tais como, Durst *et al.* [4], Cherdron *et al.* [5] e Poole e Escudier [6], os resultados obtidos mostram claramente que o escoamento através duma expansão plana mantém-se simétrico para números de Re baixos e que se torna assimétrico para valores de Re altos (superiores ao número de Re_{cr}).

Pretendemos com este trabalho, de índole numérico, estudar o comportamento de fluidos viscoelásticos numa geometria com expansão plana, sendo a razão de expansão $E = D/d = 4$. Uma vez que estamos na presença de fluidos viscoelásticos, necessitamos de uma equação constitutiva para definir o fluido, uma vez que o comportamento deste é diferente do fluido newtoniano. A equação constitutiva utilizada neste estudo segue o modelo baseado na teoria cinética para moléculas com extensão finita e não-linear, denominado por modelo FENE. O modelo que é utilizado é o proposto por Chilcott e Rallison [7] e denominado por modelo FENE-CR. Este modelo inclui efeitos de elasticidade e de reofluidificação (“shear-thinning”) nas tensões normais, mas a viscosidade de corte do fluido (η) é constante. Como método de cálculo a utilizar para a resolução das equações que governam o escoamento utilizamos o método dos volumes finitos. Este método transforma as equações diferenciais de conservação da massa e da quantidade de movimento e a equação constitutiva em equações algébricas após integração em volumes de controlo, que compõem a malha computacional. Além disso, será usado um esquema de alta-resolução CUBISTA [8], de 3ª ordem nos termos convectivos, por forma a obterem-se resultados precisos e que possam ser utilizados como resultados de referência (“benchmark results”) para outros estudos.

2. Equações e método numérico

Neste trabalho, consideramos que o escoamento é isotérmico e bidimensional, sendo o fluido incompressível. As equações de governo que regem o escoamento são compostas pela equação de conservação da massa,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

e da quantidade de movimento,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{tot} \quad (2)$$

onde \mathbf{u} é o vector velocidade, ρ é a massa volúmica (constante), p é a pressão e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor das tensões. No caso de utilizarmos uma solução polimérica homogênea, o tensor das tensões na equação (2) é decomposta pela soma da parte do solvente newtoniano com uma parte devida à solução polimérica ($\boldsymbol{\tau}_{tot} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}$). As equações (1) e (2) são acopladas com uma equação constitutiva que permite determinar o tensor das tensões extra. Escolheu-se o modelo FENE-CR modificado descrito pela seguinte equação:

$$\boldsymbol{\tau} + \frac{\lambda}{f(\boldsymbol{\tau})} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta_p \mathbf{D} \quad (3)$$

onde a função de extensibilidade $f(\boldsymbol{\tau})$ é definida por:

$$f(\boldsymbol{\tau}) = \frac{L^2 + \frac{\lambda}{\eta_p} tr(\boldsymbol{\tau})}{L^2 - 3} \quad (4)$$

sendo tr o operador traço, λ o tempo de relaxação do fluido (no caso newtoniano $\lambda \approx 0$), η_p a viscosidade polimérica (constante) e L^2 o parâmetro de extensibilidade, que mede efeitos elongacionais. O símbolo $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$ na eq. (3) designa a derivada superior de Oldroyd. A diferença que existe entre o modelo aqui aplicado (FENE-MCR) e o modelo original FENE-CR, proposto por Chilcott e Rallison [7], consiste em se ter desprezado a derivada substantiva da função de extensibilidade. O modelo FENE-MCR foi utilizado por Coates *et al.* [9], num estudo numérico do escoamento numa contracção axissimétrica, e por Oliveira [3] no estudo do escoamento viscoelástico numa expansão plana com razão de expansão de 1:3.

Os parâmetros adimensionais utilizados neste trabalho são:

- L^2 – o parâmetro de extensibilidade do modelo FENE-CR;
- $\beta = \eta_s / \eta_0$ – a razão de viscosidade do solvente, onde $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$ (constante);
- $Re = \rho U d / \eta_0$ – o número de Reynolds;
- $We = \lambda U / d$ – o número de Weissenberg.

sendo U a velocidade média no canal de entrada e d a respectiva altura (ver Fig. 1).

As eqs. (1) – (3) são transformadas para um sistema de coordenadas generalizadas e discretizadas pela aplicação

do método dos volumes finitos (FVM) numa malha colocada. Para maiores detalhes consultar Ref. [10]. As equações de conservação e constitutiva são discretizadas espacialmente por integração em volumes de controlo (VC) que compõem a malha computacional, e temporalmente através de um passo no tempo δt . Uma vez que todas as variáveis são calculadas nos centros dos volumes de controlo, são requeridos procedimentos especiais por forma a assegurar o acoplamento da pressão/velocidade (segundo o método de Rhie e Chow [11]) e o acoplamento velocidade/tensão (segundo o método de Oliveira *et al.* [12]). As equações algébricas resultantes para a quantidade de movimento têm a seguinte forma:

$$a_p \mathbf{u}_p = \sum_F a_F \mathbf{u}_F + \mathbf{S}_u \quad (5)$$

onde o índice P representa qualquer VC, o índice F corresponde aos VCs vizinhos, a_p e a_F são os coeficientes compostos pelas contribuições convectivas e difusivas, e \mathbf{S}_u é o termo fonte. A equação constitutiva é discretizada da mesma forma que a equação da quantidade de movimento, resultando em:

$$a_p^r \boldsymbol{\tau}_p = \sum_F a_F^r \boldsymbol{\tau}_F + \mathbf{S}_r \quad (6)$$

A diferença desta equação com a eq. (5) é que os coeficientes a_p^r e a_F^r contêm apenas efeitos convectivos, e existe um termo fonte dependente do próprio campo de tensões e de gradientes de velocidades. Os termos convectivos das equações discretizadas são aproximados através do esquema de alta-resolução CUBISTA [8], que é de terceira ordem no espaço e que possui, simultaneamente, uma elevada precisão numérica e boas características de convergência. Posteriormente, as equações discretizadas são resolvidas utilizando uma forma modificada do algoritmo SIMPLEC (SIMPLE Consistent) [13]. Este algoritmo permite, através de um processo iterativo de correcção de pressão, garantir uma ligação dos campos de velocidade e pressão, por forma a verificar a continuidade. Devido à presença da equação constitutiva, torna-se necessário introduzir dois novos passos na parte inicial do algoritmo, relacionados com o cálculo do tensor das tensões, tal como descrito na Ref. [12].

3. Descrição do problema

Uma representação esquemática da geometria é apresentada na Fig. 1, onde são definidas algumas quantidades relevantes. Como foi referido anteriormente este problema é bidimensional, com o fluido escoando-se através de um canal com expansão plana, sendo a razão de expansão de 1:4. Devido a esta expansão abrupta da secção do canal aparecem, a jusante da zona de expansão, duas zonas de recirculação do fluido. O escoamento é predominantemente de corte (esc. de Couette) junto às paredes do canal e extensional na zona central do mesmo. Os canais a montante e a jusante têm alturas $d = 1d$ e $D = 4d$, respectivamente. Os comprimentos dos canais são normalizados com a altura do canal de entrada d e medem $L_1 = 20d$ e $L_2 = 50d$, conforme apresentado na Fig. 1.

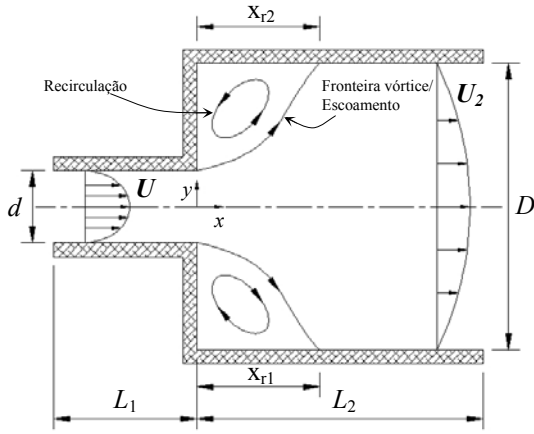


Fig. 1. Configuração esquemática do canal.

Na entrada do canal foi imposto um perfil completamente desenvolvido para todas as variáveis (u , τ_{xx} , τ_{xy}), com o perfil de velocidades definido de forma parabólica (eq. (7)), e assumindo-se que a velocidade média do canal de entrada é $U = 1$. No modelo constitutivo aqui utilizado (FENE-MCR), o perfil de velocidades completamente desenvolvido e a distribuição de tensões no canal de entrada são idênticas às que ocorrem para o fluido newtoniano. Tendo em conta a Fig. 1, temos os perfis definidos da seguinte forma:

$$u = 1.5U \left(1 - \left(\frac{y}{d/2} \right)^2 \right) \quad (7)$$

$$\tau_{xy} = \eta_p \frac{du}{dy} = - \left(\frac{12\eta_p U}{d} \right) \left(\frac{y}{d} \right) \quad (8)$$

A equação para o perfil das tensões normais τ_{xx} segue uma equação mais complicada e poderá ser analisada com maior detalhe na Ref. [3].

Neste trabalho foram utilizadas três malhas computacionais que serviram para quantificar os erros de discretização dos resultados. Os valores aqui apresentados dizem respeito à malha média (Malha 2), apresentada na Fig. 2, com $\delta x_{\min} = \delta y_{\min} = 0.05$; para maiores detalhes consultar Ref. [14].

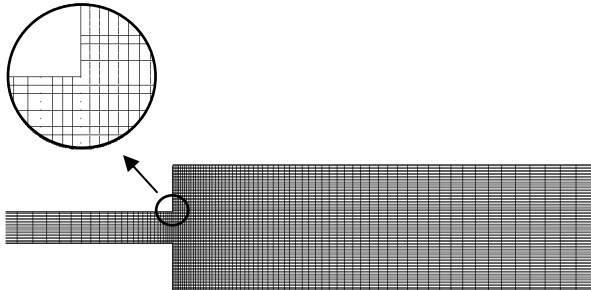


Fig. 2. Zoom da malha utilizada no cálculo computacional. $(-5 \leq x \leq 12.5, -2 \leq y \leq 2)$

A malha apresentada anteriormente é não uniforme ao longo da direcção x e uniforme ao longo da direcção y . Na vizinhança da zona de expansão ($x = 0$) existe uma maior concentração de volumes de controle, por forma a ser possível resolver numericamente e com precisão os elevados gradientes de tensão que aí ocorrem, devido à

variação abrupta da área transversal da geometria do escoamento.

4. Resultados e conclusões

Os resultados apresentados nesta secção serão divididos em duas sub-secções. Na primeira sub-secção iremos apresentar os resultados obtidos para o caso newtoniano, por forma a validar o programa de cálculo utilizado. A validação é feita apenas com valores obtidos no caso de fluido newtoniano, uma vez que não foram encontrados valores publicados para o caso viscoelástico. Posteriormente, fazemos a análise do efeito da elasticidade do fluido sobre o escoamento (caso viscoelástico), variando os parâmetros adimensionais do modelo FENE-MCR.

A. Caso newtoniano e validação

Como estamos na presença de um fluido newtoniano, o único parâmetro passível de ser variado é o número de Re . O número de Re corresponde à razão entre as forças inerciais e viscosas do fluido e iremos analisar o comportamento do escoamento na gama entre 0.01 e 50. Como o termo de forças inerciais se mantém constante e igual a 1 (sendo: $\rho = 1$, $U = 1$ e $d = 1$), apenas iremos ter variação directa das forças viscosas do fluido quando variarmos o número de Re . Para análise das características globais do escoamento foram efectuadas várias corridas computacionais, em regime estacionário, com valores de $\delta t = 2.0$ (passo no tempo do algoritmo) para $Re \geq 1$ e $\delta t = 0.5$ para $Re < 1$. Os resultados obtidos para o comprimento e intensidade dos vórtices estão apresentados na Tabela I, com $X_r = x_r/d$.

Tabela I. Comprimentos (X_r) e intensidades (ψ_r) de recirculação obtidos para o caso newtoniano.

Re	X_{r1}	X_{r2}	$\psi_{r1}(\times 10^{-2})$	$\psi_{r2}(\times 10^{-2})$
0.01	0.742	0.742	0.0597	0.0597
0.1	0.750	0.750	0.0629	0.0629
1	0.831	0.831	0.1029	0.1029
5	1.286	1.286	0.6645	0.6645
10	1.989	1.989	2.4580	2.4580
20	3.628	3.628	6.5039	6.5039
30	5.373	5.373	8.7488	8.7488
35.5	6.256	6.261	9.4299	9.4317
37	5.397	7.634	9.3129	10.0802
50	4.380	11.107	9.4942	15.2504

Os resultados obtidos mostram que à medida que o número de Re aumenta, também o comprimento e intensidade de recirculação crescem, até que se atinge um limite em que o escoamento se torna assimétrico. Esse limite corresponde ao número de Re_{cr} igual a 35.5 (usando a velocidade média U do canal de entrada e a respectiva altura d). Drikakis [2] obteve o valor de $Re_{cr} = 35.3$ e Battaglia *et al.* [1] obtiveram o valor de $Re_{cr} = 35.8$. Existe assim uma boa concordância entre o número de Re_{cr} aqui obtido e os resultados apresentados pelos autores referidos anteriormente. Para a validação dos resultados da Tabela I, iremos utilizar as correlações propostas por Scott *et al.* [15] para uma razão de

expansão de 1:4. Na Figura 3 (a) e (b) comparamos os nossos resultados com as correlações.

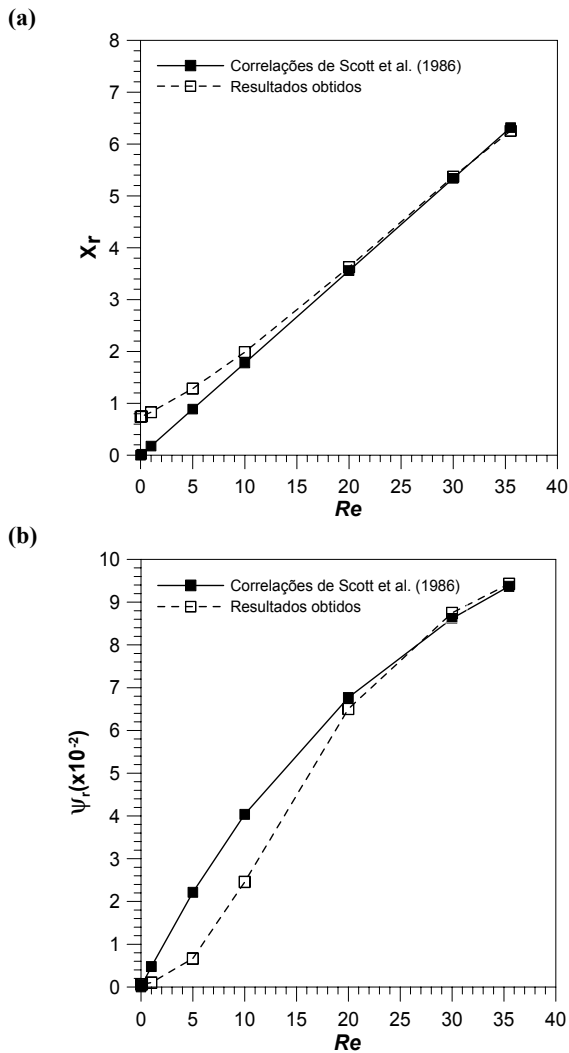


Fig. 3. (a) Comprimento de recirculação e (b) intensidade de recirculação, em função do número de Re .

Podemos verificar que para valores de Re acima de 20, os resultados aqui obtidos coincidem com as correlações propostas pelos autores Scott *et al.* [15]. Para valores inferiores já não existe concordância dos resultados, mas note-se que as correlações não são válidas para valores de Re baixos (vide [15]). Na Fig. 4, apresentamos as linhas de corrente resultantes das simulações numéricas, para valores crescentes do número de Re .

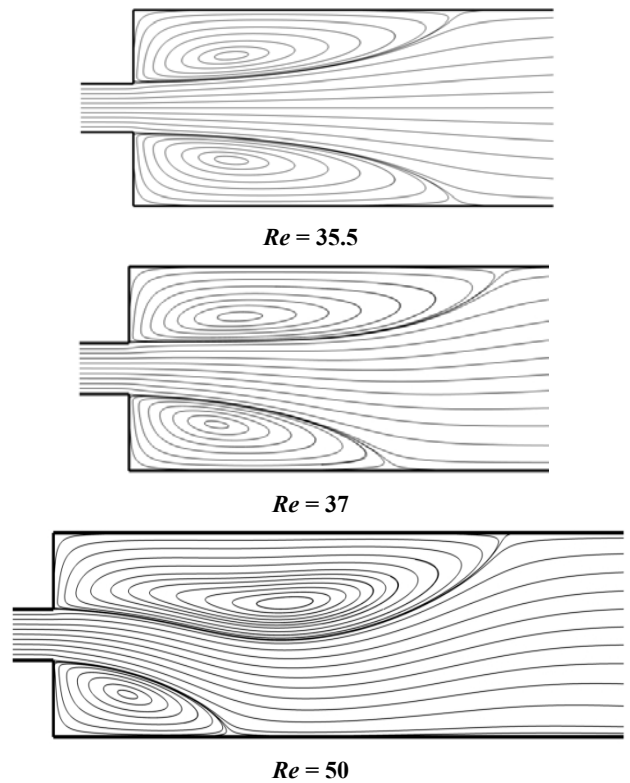
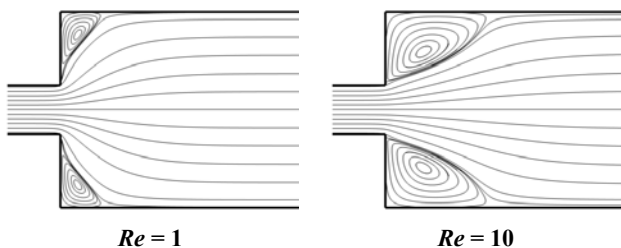


Fig. 4. Linhas de corrente para vários números de Re no caso do fluido newtoniano.

Como foi referido anteriormente, o comprimento das recirculações aumenta de forma igual com o crescimento do número de Re , até se atingir o número de Re_{cr} ($= 35.5$). A partir deste valor, podemos verificar que o escoamento torna-se assimétrico (fenómeno da bifurcação: $DX = X_{r2} - X_{r1} \neq 0$), apresentando um comprimento de recirculação maior numa das paredes relativamente à outra. Neste trabalho é na parede superior que se verifica o maior comprimento de recirculação, mas isso depende das condições iniciais.

B. Caso viscoelástico

Neste tipo de fluido irão ocorrer efeitos elásticos, que não estão presentes no fluido newtoniano, e que provocam algumas alterações nas características do escoamento. Os fluidos viscoelásticos quando submetidos a um estado de tensão mostram efeitos não lineares, relacionados com as diferenças de tensões normais. Os parâmetros independentes que podem agora ser alterados são: We , β , Re e L^2 . Os efeitos provocados por cada um dos parâmetros descritos serão analisados nesta sub-secção, com excepção do valor do parâmetro de extensibilidade (L^2) que terá um valor sempre constante e igual a 100. Este parâmetro descreve o comportamento elongacional do fluido, e quanto maior for o seu valor maior será a viscosidade elongacional. O valor escolhido foi o utilizado no trabalho de simulação numérica de Oliveira [3].

Em primeiro lugar iremos analisar a influência da elasticidade (através de We), variando o tempo de relaxação do fluido (λ). Este tempo λ corresponde ao tempo de resposta do fluido após ser retirada

instantaneamente a aplicação de uma tensão de corte constante. Na Tabela II, apresentamos as características dos vórtices para valores de We entre 0 (caso newtoniano) e 3.

Tabela II. Caso viscoelástico – efeito da elasticidade ($Re = 50, \beta = 0.8$ e $L^2 = 100$).

We	X_{r1}	X_{r2}	$\psi_{r1}(x10^{-2})$	$\psi_{r2}(x10^{-2})$
0.0	4.380	11.107	9.4942	15.2504
0.5	4.433	10.905	9.1913	14.4132
1.0	4.465	10.679	8.8333	13.7920
1.5	4.494	10.453	8.6045	13.3953
2.0	4.505	10.255	8.4277	13.2234
2.5	4.490	10.096	8.2965	13.2164
3.0	4.466	9.967	8.2021	13.2714

Podemos concluir que o comprimento de recirculação X_{r2} do vórtice da parede superior (ver Fig. 4 para $Re = 50$, no caso newtoniano) tende a diminuir substancialmente de tamanho, enquanto que o vórtice da parede inferior X_{r1} sofre um pequeno aumento. Assim, ambos os efeitos actuam de forma a diminuir a assimetria do escoamento, mantendo-se todavia, para os valores de We calculados entre 0 e 3, essa assimetria. Seguidamente, iremos avaliar a influência do parâmetro de concentração do solvente (β). Este parâmetro mede a concentração do solvente newtoniano existente na mistura polimérica. Valores elevados de β indicam que estamos na presença de uma mistura polimérica diluída. Os resultados obtidos com a variação deste parâmetro entre 1.0 (caso newtoniano) e 0.5 estão apresentados na Tabela III, para $Re = 40$ e $We = 3$.

Tabela III. Caso viscoelástico – efeito devido à concentração do solvente β ($Re = 40, We = 3$ e $L^2 = 100$).

β	X_{r1}	X_{r2}	$\psi_{r1}(x10^{-2})$	$\psi_{r2}(x10^{-2})$
1.0	4.681	8.916	9.2512	11.1359
0.9	5.048	7.983	8.6897	10.0804
0.8	6.116	6.359	8.4988	8.6388
0.7	5.777	5.839	7.8257	7.8692
0.6	5.372	5.398	7.1718	7.1960
0.5	4.939	4.960	6.3570	6.3750

Podemos verificar pelos resultados obtidos que, à medida que β diminui o escoamento passa de assimétrico para simétrico, ou seja, desaparece o fenómeno de bifurcação. Para valores de $\beta \leq 0.8$ o escoamento é simétrico, no caso particular de $Re = 40$ e $We = 3$, enquanto que para valores de $\beta > 0.8$ a assimetria mantém-se. Isto seria de prever, tendo em conta que menores valores de β corresponde a uma maior concentração de polímero na mistura, e que o efeito da elasticidade tende a atenuar assimetrias, ou seja, reduzir a tendência para o aparecimento de instabilidades.

Finalmente, iremos verificar o efeito com o fluido viscoelástico, quando é variado apenas o número de Re . Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela IV, com a variação do número de Re entre 0.01 e 50, para $We = 2, \beta = 0.5$ e $L^2 = 100$.

Tabela IV. Caso viscoelástico – efeito devido à variação do número de Re ($We = 2, \beta = 0.5$ e $L^2 = 100$).

Re	X_{r1}	X_{r2}	$\psi_{r1}(x10^{-2})$	$\psi_{r2}(x10^{-2})$
0.01	0.657	0.669	0.0365	0.0394
0.1	0.659	0.670	0.0368	0.0396
1	0.662	0.676	0.0381	0.0425
10	0.901	0.907	0.1551	0.1648
20	2.068	2.070	2.2307	2.2330
30	3.660	3.669	4.9865	4.9895
40	5.272	5.286	6.7968	6.8067
47	6.427	6.490	7.7149	7.7669
48	5.473	7.593	7.2419	8.8070
50	4.979	8.472	7.1206	9.9039

As conclusões que podemos retirar dos resultados da Tabela IV, para o caso viscoelástico, relativamente ao efeito da variação do número de Re , são semelhantes aos que foram descritos na sub-secção anterior, onde analisamos o fluido newtoniano. A diferença que temos neste caso é que devido ao efeito da elasticidade, o número de Re_{cr} ($= 47$) aumenta, isto é, o efeito de elasticidade tende a estabilizar o escoamento, atrasando o ponto crítico de transição. Na Fig. 5, apresentamos um diagrama com o efeito de bifurcação do escoamento para o caso viscoelástico ($DX = X_{r2} - X_{r1}$, em função do número de Re), comparando-o com o caso newtoniano.

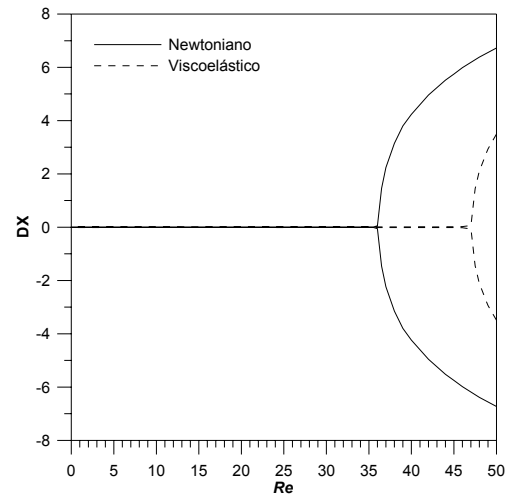
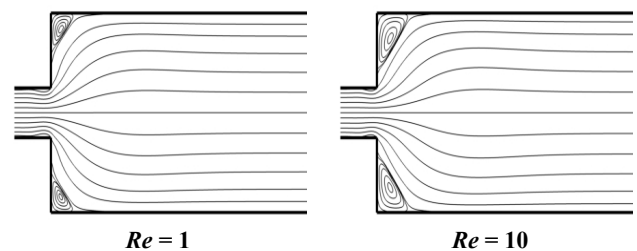


Fig. 5. Diagrama do efeito de bifurcação DX , para o caso newtoniano e viscoelástico ($We = 2, \beta = 0.5$ e $L^2 = 100$).

Como podemos verificar pelo gráfico anterior, no caso do fluido viscoelástico o ponto de transição entre escoamento simétrico e assimétrico é transladado para a direita, quando comparado com o fluido newtoniano. Na Fig. 6, apresentamos as linhas de corrente do escoamento viscoelástico para valores crescentes do número de Re .



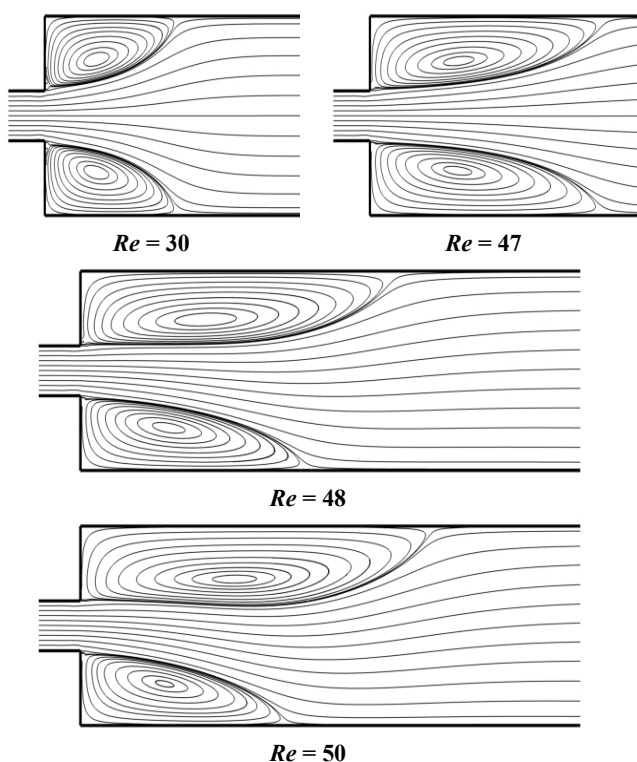


Fig. 6. Linhas de corrente para vários números de Re , no caso do fluido viscoelástico ($We = 2$, $\beta = 0.5$ e $L^2 = 100$).

Podemos verificar, pela Fig. 6, um fenómeno que surge nas linhas de corrente, comparativamente ao caso newtoniano. Esse efeito descreve-se como um “dilatamento” lateral das linhas de corrente, após a zona de expansão (“bulging”), que é devido a efeitos puramente elásticos. Pode ser analisado como se uma porção de fluido estivesse submetido a uma tracção, segundo o eixo central, a montante da expansão, que é posteriormente recuperada elasticamente, a jusante da expansão, verificando-se assim uma separação das linhas de corrente em direcção às paredes do canal (ver Fig. 6, para $Re = 10$). Esse fenómeno tem consequências sobre a variação do perfil de velocidades ao longo da linha central, tal como apresentado na Fig. 7.

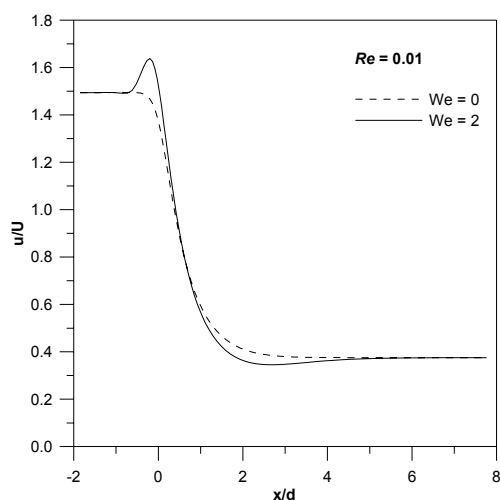


Fig. 7. Perfil de velocidades ao longo do plano central.

Verifica-se da figura anterior que para o fluido viscoelástico ocorre um “overshoot” (velocidade acima da média esperada) da velocidade a montante da expansão, devido à compressão das linhas de corrente, e um “undershoot” da velocidade logo após a expansão, devido ao “dilatamento” das linhas de corrente. No caso do fluido newtoniano, podemos verificar pela Fig. 7, que não existe qualquer “overshoot” ou “undershoot”.

Agradecimentos

Agradece-se o apoio financeiro prestado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT), através do projecto POCTI/EQU/37699/2001.

Referências

- [1] F. Battaglia, S.J. Tavener, A.K. Kulkarni e C.L. Merkle, “Bifurcation of low Reynolds number flows in symmetric channels”, *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 1, pp. 99-105, January 1997.
- [2] D. Drikakis, “Bifurcation phenomena in incompressible sudden expansion flows”, *Phys. Fluids*, Vol. 9, No. 1, pp. 76-87, January 1997.
- [3] P.J. Oliveira, “Asymmetric flows of viscoelastic fluids in symmetric planar expansion geometries”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 114, pp. 33-63, 2003.
- [4] F. Durst, J.C.F. Pereira e C. Tropea, “The plane symmetric sudden-expansion flow at low Reynolds numbers”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 248, pp. 567-581, 1993.
- [5] W. Cherdron, F. Durst e J.H. Whitelaw, “Asymmetric flows and instabilities in symmetric ducts with sudden expansions”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 84, pp. 13-31, 1978.
- [6] R.J. Poole e M.P. Escudier, “Laminar viscoelastic flow through a 1:4 plane sudden expansion”, in *12th International Symposium on Application of Laser Techniques to Fluid Mechanics 2004*, Lisboa, Portugal.
- [7] M.D. Chilcott e J.M. Rallison, “Creeping flow of dilute polymer solutions past cylinders and spheres”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 29, pp. 381-432, 1988.
- [8] M.A. Alves, P.J. Oliveira e F.T. Pinho, “A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection”, *Int. J. Numer. Mech. Fluids*, Vol. 41, pp. 47-75, 2003.
- [9] P.J. Coates, R.C. Armstrong e R.A. Brown, “Calculation of steady-state viscoelastic flow through axisymmetric contraction with the EEME formulation”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 42, pp. 141-188, 1992.
- [10] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington (1980).
- [11] C.M. Rhie e W.L. Chow, “Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation”, *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.
- [12] P.J. Oliveira, F.T. Pinho e G.A. Pinto, “Numerical simulation of non-linear elastic flows with a general collocated finite-volume method”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 79, pp. 1-43, 1998.
- [13] J.P. Doormaal e G.D. Raithby, “Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows”, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 7, pp. 147-163, 1984.
- [14] G.N. Rocha e P.J. Oliveira, “Investigação computacional do escoamento viscoelástico a baixo número de Reynolds numa expansão plana”, in *Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia 2005*, Granada, Espanha.
- [15] P.S. Scott, J. Vlachopoulos e F.A. Mirza, “A finite element analysis of laminar flows through planar and axisymmetric abrupt expansions”, *Computers and Fluids*, Vol. 14, No. 4, pp. 423-432, 1986.