

Biotransporte

Noções Básicas de Mecânica dos Fluidos e de Fluidos Não Newtonianos – Parte II

P.J. Oliveira, Maio 2010

Esta segunda parte do relatório para a disciplina de Biotransporte trata dos modelos reológicos para suspensões e líquidos não newtonianos. Em particular, são fornecidas e discutidas fórmulas que representam vários modelos de viscosidade válidos para suspensões e para líquidos com características de reofluidificação (diminuição da viscosidade com a taxa de corte) e de tensão de cedência (comportamento sólido a tensões inferiores a um determinado limiar).

Suspensões

Uma suspensão é um material líquido composto por uma mistura de duas fases, uma fase líquida pura, o meio contínuo, e uma fase discreta formada por “partículas sólidas” em movimento no seio da fase líquida, sem se dissolverem nela. A noção de partícula é aqui usada num sentido lato com uma entidade que se distingue da fase contínua na qual está suspensa, podendo ser de facto uma partícula sólida (um grão de areia, por exemplo) ou uma cápsula de um líquido delimitada por uma membrana elástica. O sangue, por exemplo, é uma suspensão de glóbulos vermelhos, glóbulos brancos e plaquetas em plasma. O plasma é a fase contínua da suspensão, comportando-se aproximadamente como um líquido newtoniano, e os glóbulos vermelhos constituem a parte preponderante da fase discreta, tendo a forma de um disco bicôncavo e sendo formados por um líquido no interior (solução de hemoglobina) envolvido numa membrana elástica. A massa volúmica da fase sólida ρ_p (índice p para partículas) difere normalmente da massa volúmica da fase contínua ρ_f (índice f para fluido), sendo no entanto importante que não seja muito superior para evitar a completa sedimentação das partículas, com separação completa entre as duas fases e deixando de facto de existir uma suspensão. Por exemplo, no caso do sangue, para o plasma $\rho_f = 1035 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ e para os glóbulos vermelhos $\rho_f = 1080 - 1100 \text{ [kg/m}^3\text{]}$, o que dá um valor de $\rho_f = 1060 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ para o sangue.

Uma suspensão, como mistura bifásica, é caracterizada pela concentração ou fracção volumétrica da fase discreta,

$$\phi = \frac{V_p}{V} \quad (1)$$

onde V_p é o volume total ocupado pelas partículas que existem num determinado volume V . Para partículas esféricas de diâmetro d , temos $V_p = N_p \pi d^3 / 6$ onde N_p é o número total de partículas no volume V . Para outras formas geométricas define-se um diâmetro equivalente d_e como o diâmetro da uma esfera que tenha volume igual ao da partícula em

causa, e a concentração volumétrica fica relacionada com a concentração em número ($n_p = N_p / V = \text{n}^\circ \text{ de partículas por unidade de volume da suspensão}$) por

$$\phi = n_p \pi d_e^3 / 6$$

A fracção volumétrica em percentagem dos glóbulos vermelhos no sangue chama-se hematócrito, H . Para uma pessoa saudável o hematócrito é cerca de 45%, ou seja 45 % em volume do sangue é ocupado pelos glóbulos vermelhos.

Viscosidade de suspensões

A viscosidade de uma suspensão depende da concentração de partículas, tendendo a aumentar quando a concentração aumenta. Quando a concentração volumétrica é baixa, inferior a 5%, a viscosidade da suspensão pode ser estimada pela seguinte fórmula deduzida por Einstein (Ann. Phy 19 (1906) 289):

$$\eta = \eta_f \left(\frac{1}{1 - \alpha \phi} \right) \quad (2)$$

com: η_f - viscosidade da fase fluida;

α - constante que depende da forma das partículas; para esferas $\alpha = 5/2$;

ϕ - fracção volumétrica das partículas.

Mostra-se que para partículas com a forma de disco o valor da constante mantém-se: $\alpha = 2.5$. Por exemplo, tomando a viscosidade do plasma como $\eta_f = 1.26 \times 10^{-3}$ [Pa.s], a viscosidade do sangue para uma concentração muito pequena de glóbulos vermelhos, de somente 5 %, vem $\eta = 1.44 \times 10^{-3}$ [Pa.s]; ou seja, há um aumento de 14 % na viscosidade devido à introdução das partículas na suspensão.

Para valores maiores da fracção volumétrica, α deixa de ser uma constante e passa a depender da própria concentração. Para o sangue, por exemplo, obteve-se a seguinte correlação, que integra ainda a dependência com a temperatura (T [K]):

$$\alpha = 0.076 \exp \left[2.49\phi + \frac{1107}{T} e^{-1.69\phi} \right] \quad (3)$$

válida para $0.05 < \phi \leq 0.6$.

Em condições normais, $T = 37^\circ C = 310K$ e $\phi = 0.45$, obtém-se $\alpha = 1.237$ (inferior ao 2.5 da equação de Einstein), que dá uma viscosidade do sangue de $\eta = 2.84 \times 10^{-3}$ [Pa.s], um aumento de 125 % relativamente à viscosidade do fluido (o plasma) no qual as partículas (os glóbulos vermelhos) estão suspensas. A viscosidade dada pela Eq. (2) aumenta rapidamente

com a concentração ϕ , de acordo com a Eq. (3). O efeito da temperatura, por outro lado, é de fazer diminuir a viscosidade. Estes efeitos são ilustrados na Fig. 1.

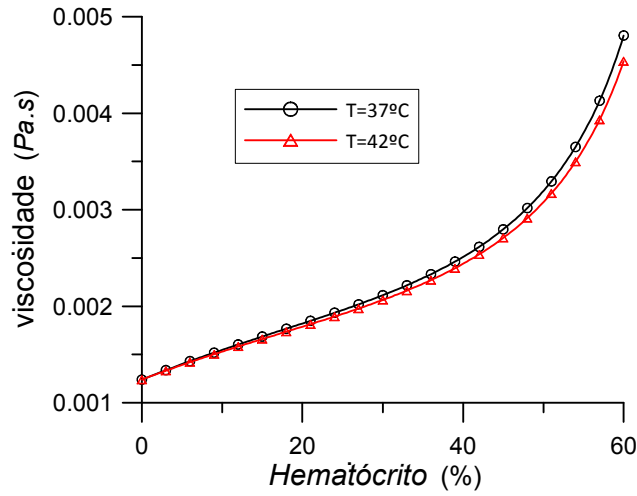


Fig. 1- Viscosidade do sangue em função da concentração de glóbulos vermelhos e temperatura (Eqs. 2-3).

Tensão de cedência de suspensões

Quando a densidade do material da fase sólida é superior à densidade da fase fluida, isto é $\rho_p > \rho_f$, haverá tendência para sedimentação desde que as velocidades e taxas de corte aplicadas sejam suficientemente baixas. Em repouso, a suspensão tenderá a separar-se nas fases sólida e líquida, e poderá ocorrer ainda formação de estruturas entre as partículas da fase sólida que estão em contacto directo. A ruptura dessas estruturas para se iniciar de novo o escoamento do material pode requerer que a tensão aplicada seja superior a um limiar mínimo abaixo do qual não há movimento. Diz-se então que o material apresenta uma tensão de cedência, sendo uma situação típica no caso das suspensões.

Para o caso do sangue foi desenvolvida a seguinte correlação empírica (Merrill et al., Biophys. J. 3(1963)199) que fornece a tensão de cedência, em unidades no sistema CGS, em função do hematócrito (fracção volumétrica dos glóbulos vermelhos):

$$\left(\tau_0 \right)^{\frac{1}{3}} = A(H - H_m) \quad [\text{din/cm}^2] \quad (4)$$

onde: $A = 0.008 \pm 0.002$, constante;

H - hematócrito, em percentagem;

H_m - hematócrito mínimo para existir tensão cedência, $H_m = 5$ a 8 .

Por exemplo, para $H = 45$, obtém-se $\tau_0 = [0.008(45 - 5)]^3 = 0.0328 \text{ [din/cm}^2] = 3.28 \text{ [mPa]}$. Quando se varia a constante A entre os limites de validade, verifica-se que a tensão de cedência do sangue poderá variar entre 1.4 e 6.4 [mPa] em condições de hematócrito normais.

Efeito de Fahraeus-Lindqvist

A viscosidade de uma suspensão parece ainda depender do diâmetro do tubo onde circula, quando esse diâmetro é suficientemente pequeno (inferior a cerca de 100 vezes a dimensão das partículas em suspensão, mas superior à dimensão das partículas). Este efeito resulta do facto de se formar uma zona junto à parede do tubo que fica livre de partículas, onde localmente a viscosidade cai para o valor da viscosidade da fase fluida da suspensão, e que age como se tratasse duma camada de lubrificação. O efeito só é relevante quando a espessura da camada sem partículas, que é da ordem da dimensão das partículas, começa a não ser muito inferior ao diâmetro do tubo.

No caso do sangue esse efeito, de redução da viscosidade para diâmetros dos vasos inferiores a cerca de 300 μm , chama-se de efeito de Fahraeus-Lindqvist, os autores que primeiro o relataram. A camada de plasma junto às paredes vasculares tem uma espessura de cerca de 2 a 5 μm (os glóbulos vermelhos têm cerca de 8 μm de diâmetro). A medição da viscosidade foi feita com um viscosímetro capilar, que no fundo usa a equação de Poiseuille (Eq. 29 da Parte I) para determinar a viscosidade a partir de medições da queda de pressão Δp num comprimento L : $\eta = \Delta p \pi R^4 / L 8 \dot{Q}$ (R - raio do vaso; \dot{Q} - caudal volumétrico de sangue). Esta expressão só é válida para fluido newtoniano e deve ser modificada para permitir a medição da viscosidade com fluidos não newtonianos. Este efeito ocorre sobretudo nas arteríolas e nos vénulos com diâmetros inferiores a 1 mm; nos capilares, quando o diâmetro fica inferior a cerca de 10 μm , os glóbulos começam a interagir com as paredes, precisando de se deformar para circularem, e a viscosidade volta a subir.

Escoamento pulsante

Um escoamento ocorre em regime variável cíclico quando o gradiente de pressão que o gera varia no tempo de forma sinusoidal, com frequência $f [\text{s}^{-1}] = [\text{Hz}]$ e frequência angular $\omega [\text{rad/s}]$ ($\omega = 2\pi f$). Por exemplo, o escoamento do sangue é pulsante, com uma frequência imposta pelo ritmo de batida do coração de cerca de 72 por minuto, o que dá uma frequência de 1.2 $[\text{s}^{-1}]$. O escoamento pulsante de fluido newtoniano em tubo circular foi analisado num relatório para disciplina de Hemodinâmica, que deve ser consultado para se estudar os detalhes do que é aqui apresentado de forma breve. A caracterização do escoamento continua a ser feita com o número de Reynolds, que mede a relação entre forças inerciais (de convecção) e forças viscosas (de difusão), existindo agora um parâmetro sem dimensões adicional, o número de Womersley (ou de Stokes) definido como

$$\alpha = R \sqrt{\frac{\rho \omega}{\eta}} \quad (5)$$

Este parâmetro mede a proporção das forças inerciais devidas à oscilação temporal, relativamente às forças viscosas. Pode ser visto como a raiz quadrada de um número de Reynolds oscilante: $\alpha^2 = \rho(\omega R)R / \eta = \rho U_o R / \eta \equiv Re_o$, onde $U_o = \omega R$ é uma velocidade característica da oscilação. Quando α é pequeno ($\alpha < 1$), o escoamento oscilante num tubo comporta-se como um escoamento de Poiseuille, com o caudal a oscilar em fase com o gradiente de pressão imposto e o perfil de velocidade a manter-se basicamente parabólico, com uma velocidade máxima que também oscila com frequência ω . Quando α é grande ($\alpha > 10$), a frequência imposta é alta e o campo de velocidades não tem tempo para acompanhar a oscilação do gradiente de pressão que gera o movimento. Na zona central do tubo o perfil de velocidades ficam basicamente uniforme (perfil “tampão”), com magnitudes pequenas, podendo haver uma zona estreita de velocidades superiores junto à parede do tubo. A oscilação das velocidades fica desfasada relativamente à frequência imposta pelo gradiente de pressão, havendo um atraso de cerca de 90 graus. Ou seja, o máximo de velocidade ocorre cerca de $\frac{1}{4}$ de período depois do máximo da pressão (o período é o inverso da frequência, $T = 1 / f$ [s]).

No sistema circulatório humano a frequência de pulsação é a mesma (imposta pelo coração) e por isso o número de Womersley vai diminuindo com o raio dos vasos por onde o sangue circula, ou seja, é elevado nas grandes artérias, e vai diminuindo à medida que se progride para artérias pequenas, arteríolas e capilares. Na microcirculação ($R < 50 \mu\text{m}$) a influência da pulsação é praticamente desprezável. Valores típicos de α : 16 (aorta); 3.2 (artéria pequena, 4 mm diâmetro).

Fluidos não newtonianos

Nas secções anteriores tratou-se o caso das suspensões, ou seja a influência sobre a viscosidade da presença de uma fase com partículas “sólidas” suspensas numa fase fluida. Admitiu-se que a viscosidade da fase fluida era newtoniana, sendo portanto uma constante para uma dada temperatura. No entanto muitos líquidos apresentam efeitos de fluidificação, ou seja diminuição da viscosidade com o aumento da taxa de corte, e efeitos de tensão de cedência, só escoam quando a tensão é superior a um valor mínimo.

Nesta secção serão tratados modelos reológicos para fluidos não newtonianos do tipo GNF (*Generalized Newtonian Fluids*), cuja equação de estado é muito semelhante à newtoniana,

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (6)$$

a única diferença consistindo no facto da viscosidade η poder ser agora uma função da taxa de deformação de corte $\dot{\gamma}$, isto é $\eta = \eta(\dot{\gamma})$. Na Eq. (6) assume-se que τ e $\dot{\gamma}$ são as magnitudes da tensão e da taxa de deformação, sendo por isso valores positivos.

Fluidificação

Modelo de lei de potência

O modelo GNF mais simples que contabiliza o efeito de fluidificação ou espessamento (*shear thinning* ou *shear thickening*) é o modelo da lei de potência:

$$\boxed{\tau = K \dot{\gamma}^n} \quad \text{ou} \quad \boxed{\eta = K \dot{\gamma}^{n-1}} \quad (7)$$

onde: K - consistência [Pa.sⁿ]

n - índice da lei de potência

Quando $n < 1$ a viscosidade diminui com o aumento da taxa de corte e o fluido é reofluidificante, o caso mais comum. Usava-se anteriormente a designação de fluido pseudoplástico. Quando $n > 1$ a viscosidade aumenta com $\dot{\gamma}$ e o fluido é reoespessante (designação antiga, fluido dilatante). Quando $n = 1$ a viscosidade é constante e temos de novo o caso newtoniano com $\mu = K$.

O sangue é fluidificante quando $\dot{\gamma} < 100 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ e algumas propostas para ajuste entre a lei de potência e viscosidades efectivamente medidas foram (unidades MKS):

$$K = 0.0134, n = 0.785 \quad (\Rightarrow \eta = 0.00498 \text{ [Pa.s]}) \quad (8a)$$

de Walburn e Schneck (Bioreology 13 (1976) 201); e

$$K = 0.0161, n = 0.63 \quad (\Rightarrow \eta = 0.00293 \text{ [Pa.s]}) \quad (8b)$$

de Owen et al. (artigo de conferência 2005). Os valores de viscosidade indicados acima dentro dos parêntesis são para $\dot{\gamma} = 100 \text{ [s}^{-1}\text{]}$. Normalmente tanto K como n variam com o hematócrito e modelos de lei de potência para o sangue mais sofisticados deveriam incluir esses efeitos.

Modelo de Carreau-Yasuda

Uma variação realista da viscosidade com a taxa de deformação (τ versus $\dot{\gamma}$) deve apresentar um patamar η_∞ para taxas de corte elevadas $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, igual à viscosidade do solvente no caso de uma suspensão ou solução, e outro patamar η_0 para taxas de corte muito baixas, $\dot{\gamma} \rightarrow 0$. Nesses limites o modelo da lei de potência não tem um comportamento correcto (resulta em $\eta \rightarrow \infty$ quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, e $\eta \rightarrow 0$ quando $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$). O modelo de Carreau-Yasuda dado pela seguinte equação resolve esse problema, à custa de um número maior de parâmetros:

$$\eta = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty}) \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (9)$$

Onde: n - índice [-]

a - constante de Yasuda [-]

η_0 - viscosidade para $\dot{\gamma}$ nulo [Pa.s]

η_{∞} - viscosidade para $\dot{\gamma}$ infinito [Pa.s]

λ - constante de tempo [s]

O índice n tem um significado semelhante ao índice da lei de potência, com $-(1-n)$ a representar a taxa de decaimento da viscosidade na zona de variação em potência, as viscosidades para $\dot{\gamma} = 0$ e $\dot{\gamma} = \infty$ têm um significado físico imediato, o inverso da constante de tempo λ corresponde ao valor de $\dot{\gamma}$ a partir do qual a viscosidade começa a diminuir, e a é obtido por ajuste a dados experimentais.

Conjunto de valores usados para a viscosidade do sangue (Cho e Kensey, Biorheology 28 (1991) 241):

$$a = 2, n = 0.3568, \lambda = 3.313 \text{ [s]}, \eta_0 = 0.056 \text{ [Pa.s]} \text{ e } \eta_{\infty} = 0.00345 \text{ [Pa.s]}. \quad (10a)$$

Com estes parâmetros obtém-se $\eta = 0.00471 \text{ [Pa.s]}$ para $\dot{\gamma} = 100 \text{ [s}^{-1}\text{]}$. No caso do escoamento num tubo circular com diâmetro $D = 10 \text{ [mm]}$ para um número de Reynolds de 100 ($\rho = 1060 \text{ [kg/m}^3\text{]}$), obtém-se uma taxa de corte efectiva de $\dot{\gamma}_{ef} = U / R = 14.7 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ e uma viscosidade efectiva de $\eta(\dot{\gamma}_{ef}) = 0.00777 \text{ [Pa.s]}$.

Não se fique com a ideia que os parâmetros dados acima são únicos. Outro conjunto de valores obtidos da literatura (Gijssen et al, J Biomechan. 32 (1999) 601) para representar com o modelo Carreau-Yasuda a viscosidade do sangue é:

$$a = 0.644, n = 0.392, \lambda = 0.110 \text{ [s]}, \eta_0 = 0.022 \text{ [Pa.s]} \text{ e } \eta_{\infty} = 0.0022 \text{ [Pa.s]} \quad (10b)$$

Neste caso, para escoamento em tubo com $Re=100$ obtém-se: $\dot{\gamma}_{ef} = 19.2 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ e uma viscosidade efectiva de $\eta(\dot{\gamma}_{ef}) = 0.0102 \text{ [Pa.s]}$, um pouco superior à do exemplo anterior. Para $\dot{\gamma} = 100 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ estes parâmetros dão $\eta = 0.00604 \text{ [Pa.s]}$.

Tensão de Cedência

Modelo de Bingham

Consiste na sobreposição de uma tensão de cedência a uma tensão newtoniana, vindo definido pelas equações:

$$\boxed{\tau = \tau_0 + \mu \dot{\gamma}} \quad (\text{para } \tau > \tau_0) \quad (11a)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad (\text{para } \tau \leq \tau_0) \quad (11b)$$

com parâmetros: τ_0 - tensão de cedência (*yield stress*) [Pa] = [N/m²]

μ - coeficiente de viscosidade, constante [Pa.s]

Fisicamente, corresponde a um material que se comporta como um sólido indeformável quando a tensão aplicada é inferior à tensão de cedência (τ_0) e flui como um fluido newtoniano para tensões superiores. A viscosidade de corte do modelo, após o início do escoamento, é dada por:

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \mu + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} \quad (12)$$

e só fica constante (igual a μ) quando a taxa de corte é suficientemente elevada.

Modelo de Herschel-Bulkley

No sentido de integrar alguma fluidificação no modelo de Bingham, considerou-se que a resposta do material à tensão de corte aplicada é do tipo de lei de potência após se iniciar o escoamento. Assim, este modelo consiste na sobreposição de uma tensão de cedência a uma tensão dada pela lei de potência:

$$\boxed{\tau = \tau_0 + K \dot{\gamma}^n} \quad (\text{para } \tau > \tau_0) \quad (13a)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad (\text{para } \tau \leq \tau_0) \quad (13b)$$

com 3 parâmetros, τ_0 , K e n , que já foram explicados. A viscosidade de corte é:

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = K \dot{\gamma}^{n-1} + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} \quad (14)$$

seguindo a lei de potência para valores de $\dot{\gamma}$ suficientemente elevados.

Modelo de Casson

Este modelo foi desenvolvido para representar as características materiais de tintas de impressão sendo também muito utilizado em hemodinâmica para modelar a viscosidade do sangue. Tem algum suporte teórico e permite obter analiticamente a solução para escoamento completamente desenvolvido em tubo (ver relatório de Hemodinâmica). A equação do modelo é:

$$\boxed{\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu\dot{\gamma}}} \quad (\text{para } \tau > \tau_0) \quad (15a)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad (\text{para } \tau \leq \tau_0). \quad (15b)$$

e tem só 2 parâmetros independentes: tensão de cedência τ_0 [Pa] e coeficiente de viscosidade de Casson (constante) μ [Pa.s].

Desenvolvendo a expressão da tensão de corte vem

$$\tau = \underbrace{\tau_0}_{\text{Bingham}} + \underbrace{\mu\dot{\gamma}}_{\text{Newt.}} + \underbrace{2\sqrt{\mu}\sqrt{\tau_0}\dot{\gamma}^{0.5}}_{\text{Lei_Potencia}} \quad (16)$$

mostrando de forma mais clara a tensão de cedência (1º termo), termo linear newtoniano (2º termo), e termo não-linear de lei de potência com $n = \frac{1}{2}$ (3º termo). A viscosidade de corte é dada por:

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu + \frac{2\sqrt{\mu}\sqrt{\tau_0}}{\dot{\gamma}^{0.5}}. \quad (17)$$

Valores ilustrativos dos parâmetros do modelo de Casson quando aplicado ao caso do sangue (Charm e Kurland, Nature 206 (1965) 617):

$$\mu = 2.76 \times 10^{-3} \text{ [Pa.s]}, \quad \tau_0 = 0.0108 \text{ [Pa]} \quad (18)$$

Para $\dot{\gamma} = 100 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ este modelo de Casson dá $\eta = 0.00396 \text{ [Pa.s]}$.

A tensão de cedência pode também ser obtida com a correlação discutida acima quando se tratou de suspensões (Eq. 4) que tende a dar valores algo inferiores ao da Eq. (18). A Fig. 2 compara a variação da viscosidade do sangue tal como prevista por 3 modelos newtonianos generalizados: Carreau-Yasuda (parâmetros da Eq. 10a), Casson (parâmetros da Eq. 18) e Lei de Potência (parâmetros da Eq. 8b). Verifica-se que na zona de taxas de corte entre 1 e 100 s^{-1} as viscosidades não são muito diferentes, mas fora dessa gama surgem discrepâncias significativas. Para o modelo de Casson com valores de $\dot{\gamma} < 0.5 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ a viscosidade aumenta muito mas isso não deverá influenciar a tensão de corte pois entra-se então na zona de não cedência (sem deformação). Já o modelo da lei de potência mostra os problemas de falta de realidade física para $\dot{\gamma}$ muito pequenos e muito altos, sendo de facto válido numa zona de $\dot{\gamma}$ bastante restrita (os autores referem $0.1 < \dot{\gamma} < 100 \text{ s}^{-1}$).

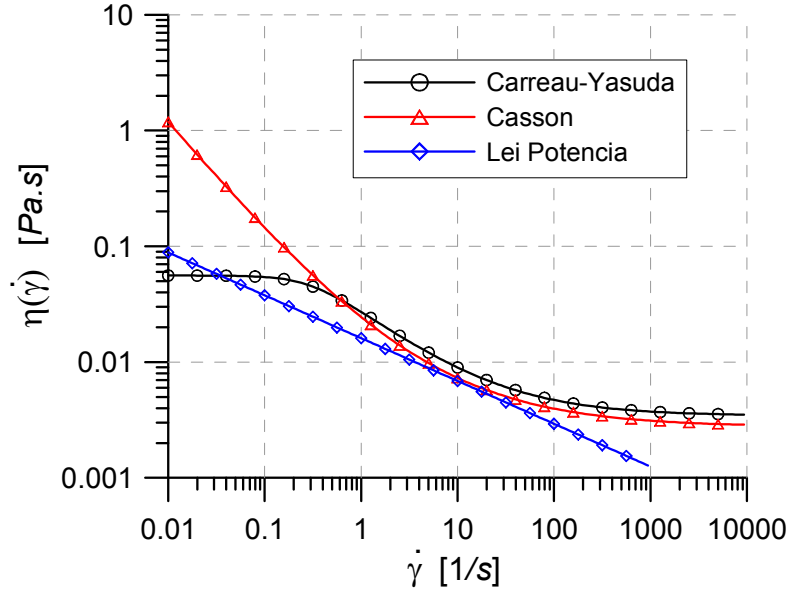


Fig. 2- Viscosidade em função da taxa de corte para três modelos GNF com parâmetros ajustados ao caso do sangue (Eqs. 10a, 18 e 8b).

Escoamento em Tubo para Modelo de Lei de Potência

Nesta secção faz-se a dedução do perfil de velocidades para escoamento completamente desenvolvido em tubo circular quando a viscosidade varia segundo o modelo da lei de potência, e obtêm-se ainda expressões para a velocidade média (caudal), velocidade máxima, tensão e taxa de deformação na parede. A dedução segue os mesmos passos usados no relatório anterior para fluido newtoniano. A equação de partida é a Eq (25) (Biotransporte – Parte I) que representa o balanço de forças num elemento de fluido cilíndrico e que é independente do modelo de viscosidade:

$$\tau = \frac{1}{2} Pr$$

Igualando à Eq (6) que define o modelo da lei de potência, tem-se

$$\tau = \frac{1}{2} Pr = K \dot{\gamma}^n \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma} = \left(\frac{Pr}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} = -\frac{du}{dr} \quad (19)$$

Usou-se $\dot{\gamma} = -du/dr$ porque o gradiente de velocidade é negativo e $\dot{\gamma}$ deve ser positivo por definição. Integrando esta última equação e usando a condição de não escorregamento na parede, obtém-se:

$$u = \left(\frac{P}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{R^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \right) \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right) \quad \Rightarrow \quad u = U_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right) \quad (20)$$

Com velocidade máxima no eixo:

$$U_0 = \left(\frac{P}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{R^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \right) \quad (21)$$

A velocidade média vem da integração do perfil de velocidades sobre a secção circular:

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R U_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right) 2\pi r dr = \frac{2U_0}{R^2} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^{\frac{1}{n}+3}}{(\frac{1}{n}+3)R^{\frac{1}{n}+1}} \right) = U_0 \left(\frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{1}{n}+3} \right)$$

Ou seja:

$$\frac{U_0}{U} = \left(\frac{\frac{1}{n}+3}{\frac{1}{n}+1} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{U_0}{U} = \frac{3n+1}{n+1}} \quad (22)$$

e a relação entre caudal e gradiente de pressão (o equivalente da lei de Poiseuille) fica:

$$\boxed{U = \left(\frac{P}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{3n+1} \right) R^{\frac{1}{n}+1}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{PR}{2K} = \left[\frac{U}{R} \left(3 + \frac{1}{n} \right) \right]^n} \quad (23)$$

É útil verificar que para $n = 1$ se recuperam as fórmulas válidas para fluido newtoniano, com $\mu = K$:

$$U = \left(\frac{P}{2K} \right) \left(\frac{1}{3+1} \right) R^2 = \frac{PR^2}{8K} \quad \text{e} \quad \frac{U_0}{U} = \frac{3+1}{1+1} = 2. \quad (23a)$$

Por fim, deduzem-se fórmulas para a tensão na parede e a respectiva taxa de corte. Da Eq. (23) e do balanço de forças tem-se imediatamente:

$$\tau_w = \frac{1}{2} PR \Rightarrow \boxed{\tau_w = K \left(\frac{U}{R} \left(3 + \frac{1}{n} \right) \right)^n} \quad (24)$$

Derivando o perfil de velocidades (Eq. 20) e calculando para $r = R$, obtém-se

$$\dot{\gamma}_w = - \left(\frac{du}{dr} \right)_w = U_0 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{R^{\frac{1}{n}}}{R^{\frac{1}{n}+1}} = \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{U_0}{R} \quad (25a)$$

ou

$$\dot{\gamma}_w = \left(3 + \frac{1}{n} \right) \frac{U}{R}. \quad (25b)$$

De facto esta equação podia ter sido obtida imediatamente das Eqs. 19 (com $r = R$) e 23. Para $n = 1$ tem-se a taxa de corte na parede válida para fluido newtoniano, $\dot{\gamma}_w = 4U / R$.

A Fig. 3 mostra uma comparação entre perfis de velocidade em tubo circular obtidos com a lei de potência (Eq. 20) e com a lei newtoniana. Quando o índice da lei de potência diminui e o fluido se torna mais fluidificante, o perfil fica mais cheio e plano na zona junto ao eixo, e a velocidade máxima diminui. Repare-se que todos estes perfis transportam o mesmo caudal, ou seja a velocidade média é igual para todos (em termos normalizados, tem-se $U = 1$ e $R = 1$).

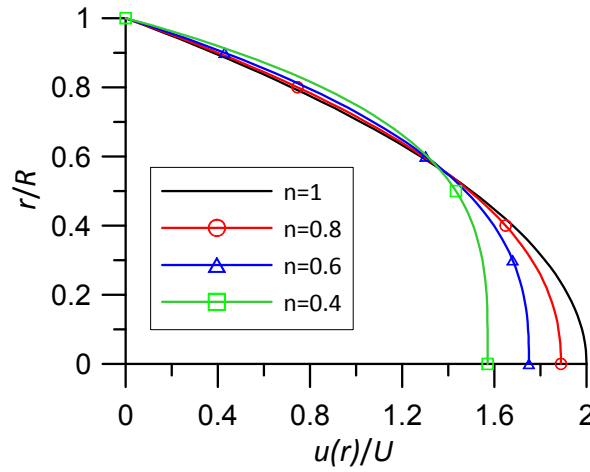


Fig. 3- Perfis de velocidade: Newtoniano, $n=1$; Lei Potência $n=0.8$, 0.6 e 0.4 .

A influência da fluidificação torna-se mais clara representando sob forma dimensional o gradiente de pressão em função do caudal. A Fig. 4 mostra um gráfico desse tipo para o caso do escoamento de sangue numa artéria de diâmetro igual a 5 [mm], tendo o sangue sido modelado como fluido newtoniano ($\mu = 0.0035$ [Pa.s]) ou fluido de lei de potência (Eq. 8b).

Observa-se que a relação P versus \dot{Q} é linear para o fluido newtoniano, como seria de esperar pela lei de Poiseuille (Eq. 23a), mas é não linear, com tendência a diminuir a inclinação, para o fluido que segue a lei de potência. Ou seja, este fluido tenderá a necessitar um gradiente de pressão inferior ao caso newtoniano para mover o mesmo caudal. Para valores de caudal baixos, a Fig. 4 mostra valores superiores de P para o caso não newtoniano, porque este fluido apresenta uma viscosidade bastante superior à viscosidade newtoniana. Neste exemplo a velocidade média foi variada de 0 a 10 [cm/s], que corresponde à variação de caudal de 0 a cerca de 2 [ml/s] da Fig. 4, e a taxa de corte efectiva ($\dot{\gamma} = U / R$) varia entre 0 e 40 [s^{-1}]. Como foi já referido, esta gama encontra-se na zona onde os efeitos não newtonianos são importantes no caso do sangue ($\dot{\gamma} \leq 100$ [s^{-1}]).

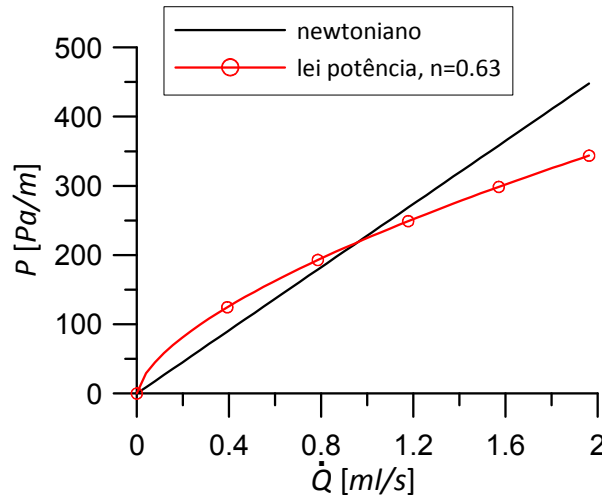


Fig. 4- Gradiente de pressão versus caudal: escoamento em tubo.

Número de Reynolds efectivo

O número de Reynolds é definido pela Eq. (32) da Parte I. Para modelos de viscosidade não newtonianos, a viscosidade varia com a taxa de deformação e torna-se necessário especificar como deve ser obtida a viscosidade que aparece na definição do número de Reynolds. Para isso usa-se uma viscosidade efectiva, calculada a uma taxa de deformação efectiva:

$$Re = \frac{\rho U D}{\eta_{ef}} \quad \text{com} \quad \eta_{ef} = \eta(\dot{\gamma}_{ef}) \quad (26)$$

A escolha da taxa de deformação efectiva depende do escoamento. Para escoamento em tubo uma escolha adequada seria a taxa de corte na parede:

$$\dot{\gamma}_{ef} = \dot{\gamma}_w \quad (27a)$$

Esta é dada por $4U/R$ para fluido newtoniano e pela Eq. (25b) para lei de potência. No entanto, para fluidos não newtonianos que seguem modelos de viscosidade mais complexos pode não ser fácil obter a taxa de corte na parede. Uma forma alternativa e mais simples de definir uma taxa de corte efectiva é:

$$\dot{\gamma}_{ef} = \frac{U}{R} \quad (27b)$$

No exemplo anterior, a variação do número de Reynolds (Eqs. 26 e 27b) com a velocidade média imposta à partida, é mostrada na Fig. 5 a. Re aumenta linearmente no caso newtoniano e tem valores algo menores no caso da lei de potência. Os valores menores resultam do facto da taxa de corte efectiva da Eq (27b) ser inferior à taxa de corte representativa do escoamento em tubo do fluido de lei de potência, o que por sua vez resulta

em viscosidades maiores (ver Fig. 5 b). Veja-se como a viscosidade do fluido de lei de potência é sempre superior ao valor de 0.0035 [Pa.s] do fluido newtoniano.

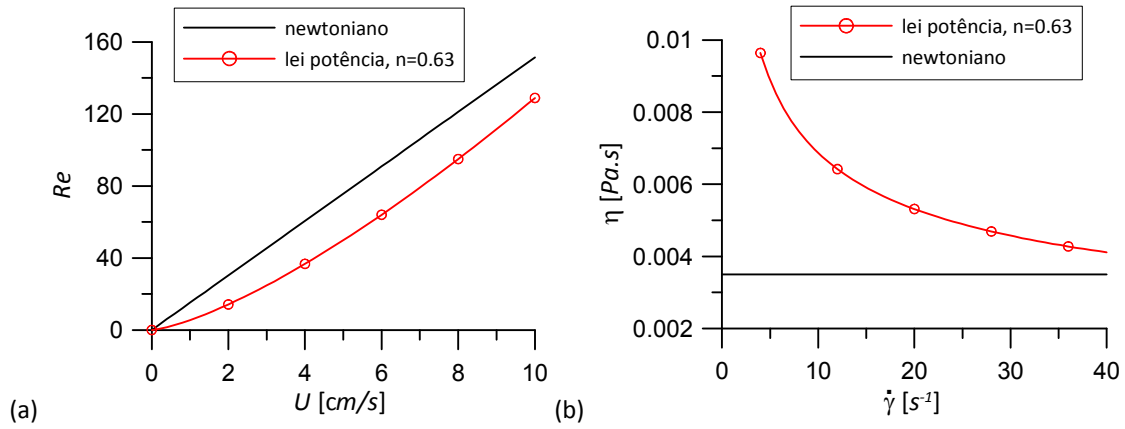


Fig. 5- (a) Variação do número de Reynolds efectivo com a velocidade média e (b) da viscosidade com a taxa de corte efectiva Eq. (27b) (mesmo caso da Fig. 4).

Em geral, sendo usada a definição da Eq. (27b) para a taxa de corte efectiva, é necessário inverter por iteração a equação:

$$Re = \frac{2\rho\dot{\gamma}_{ef}R^2}{\eta(\dot{\gamma}_{ef})} \Rightarrow \dot{\gamma}_{ef} = \frac{\eta(\dot{\gamma}_{ef})Re}{2\rho R^2} \text{ (resolver por iteração)} \quad (28)$$

por forma a obter $\dot{\gamma}_{ef}$ (e $U = R\dot{\gamma}_{ef}$) quando Re é dado. Quando se usa o modelo de Carreau-Yasuda, por exemplo, este procedimento tem de ser seguido para se saber que velocidade média deve ser imposta por forma a simular um determinado número de Reynolds. Os valores dados acima, nos parágrafos que seguem as Eqs. (10a) e (10b), foram calculados desta forma, usando o programa em Anexo.

**ANEXO – Programa para calcular a velocidade média quando o numero de Reynolds é dado,
para modelo Carreau-Yasuda**

```

C
C MODELO CARREAU-YASUDA
C  CALCULAR VALOR DA VELOCIDADE MEDIA PARA REYNOLDS DADO
C      - VIS0, VISINF, LAMBDA E N CONSTANTES
C
      PROGRAM VISGNF
      AN=0.3568
      DEN=1060.
      VIS0=0.056
      VISI=0.00345
      AL=3.313
      AA=2.
C H: largura canal ou diametro tubo
      H=0.01
      PRINT *, ' LARGURA CANAL OU DIAM TUBO=',H
      ITMAX=100
      ITER=0
      TOL=1.E-4
      U1=0.0745
      PRINT *, ' RE ?'
      READ(*,*) RE
      PRINT *, ' n'
      READ(*,*) AN

10  CONTINUE
      ITER=ITER+1
      U1N=U1
      GAM1=U1/(0.5*H)
      VIS=VISI+(VIS0-VISI)*(1.+(AL*GAM1)**AA)**((AN-1)/AA)
      U1=VIS*RE/DEN/H
      WRITE(*,*) ITER,U1
      IF(ITER.GT.ITMAX) THEN
        PRINT *, ' ITER GT ITMAX, STOP'
        STOP
      END IF
      IF(ABS(U1-U1N)/U1N.GT.TOL) GO TO 10

      VIS=VISI+(VIS0-VISI)*(1.+(AL*GAM1)**AA)**((AN-1)/AA)
      RE=DEN*U1*H/VIS
      PRINT *, ' VIS EFF=',VIS, ' (PA.S)    RE=',RE
      PRINT *, ' U1=',U1, ' M/S'
      PRINT *, ' GAM1=',GAM1
      print *, ' GAMA WALL canal=',3.*GAM1, ' tubo=',4.*GAM1
      STOP
      END

```