

Biotransporte

Noções Básicas de Mecânica dos Fluidos e de Fluidos Não Newtonianos - Parte I

P.J. Oliveira, Maio 2010

Propriedades materiais básicas

Neste estudo iremos considerar materiais que em geral se comportam como fluidos, isto é, que se deformam continuamente quando sujeitos a uma força transversal (força de corte).

As propriedades básicas de um material com interesse para a mecânica dos fluidos são a massa volúmica, ρ , e a viscosidade, μ ou η . A massa por unidade de volume da água a temperatura normal (25°C) é $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; para o sangue $\rho \cong 1060 \text{ kg/m}^3$. A viscosidade é a propriedade relacionada com a maior ou menor facilidade de escorregamento de um material, ou seja é uma medida da sua fluidez: quanto mais viscoso, menor é a fluidez do material. Para uma determinada temperatura, a viscosidade é constante quando esse material tem comportamento newtoniano. Neste caso usa-se o símbolo μ para a viscosidade. Quando o comportamento é não newtoniano o coeficiente de viscosidade pode variar com o estado de deformação do material e a viscosidade deixa de ser “constante”; neste caso usa-se o símbolo η para representar a viscosidade.

Ar e água são dois exemplos de fluidos newtonianos, sendo amplamente utilizados em aplicações da mecânica de fluidos em áreas da engenharia. Qualquer fluido constituído por moléculas simples e de baixo peso molecular, sem formação de estruturas internas, comporta-se em condições usuais como um fluido newtoniano (a definição exacta do que é newtoniano é dada pela Eq. 1 abaixo). Por outro lado, materiais com uma microestrutura interna complexa ou formados por constituintes de elevado peso molecular têm tendência a comportar-se de forma não newtoniana. A viscosidade da água é $\mu = 10^{-3} \text{ Pa.s}$ a 25°C, diminuindo para $\mu = 0.695 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ a 37°C, e a do sangue, assumido como fluido newtoniano (uma aproximação que só é válida em casos restritos), é $\mu \approx 3.5 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ a 37°C. A viscosidade do ar, em condições padrão, é aproximadamente $\mu = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$.

A unidade de viscosidade no sistema internacional (MKS) é o Pascal x segundo: $\text{Pa.s} = \text{N.s/m}^2 = \text{Kg/(m.s)}$. Para evitar a utilização de valores muito pequenos pode usar-se o mili Pascal segundo, $\text{mPa.s} = 0.001 \text{ Pa.s}$. Em alternativa usa-se com frequência (sobretudo em aplicações biomédicas) a unidade de viscosidade do sistema CGS (com base em centímetros, gramas e segundos) que é o Poise, P. $1 \text{ P} = 0.1 \text{ Pa.s}$ ou $1 \text{ Pa.s} = 10 \text{ P}$. O centi Poise, $\text{cP} = 0.01 \text{ P}$, é igual ao mPa.s . É fácil recordar que em condições de temperatura normais a viscosidade da água é $\mu = 1 \text{ mPa.s} = 1 \text{ cP}$.

Escoamento de Couette

A viscosidade é determinada a partir de uma experiência (teórica) em que camadas de fluido deslizam umas sobre as outras ao longo de uma determinada direcção. A este arranjo chama-se escoamento de Couette e está representado na Fig. 1 a. O material (um fluido, por exemplo) é colocado entre duas placas paralelas e aplica-se uma força constante à placa superior de

forma a esta se mover para a direita a uma velocidade constante. A placa inferior mantém-se em repouso, e o espaçamento entre as placas, h , mantém-se constante.

Mostra-se (ver abaixo) que neste escoamento a tensão a que cada camada de fluido está submetida é constante, que a taxa de deformação é também constante e que o perfil de velocidades é linear. Pode-se assim, através de várias medições com este escoamento, relacionar a tensão com a taxa de deformação.

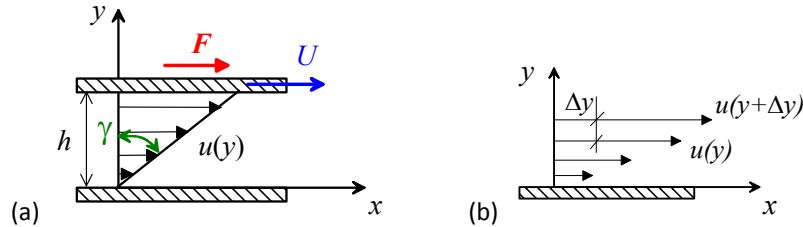


Fig. 1- (a) Escoamento de Couette plano: perfil de velocidades e definição da deformação de corte γ .
(b) esquema local das camadas de fluido com velocidades diferentes para definir a taxa de corte $\dot{\gamma}$.

Um fluido newtoniano é definido através da lei da viscosidade de Newton:

$$\tau = \mu \dot{\gamma}, \quad (1)$$

Esta equação define a viscosidade como a constante de proporcionalidade entre a tensão τ e a taxa de deformação de corte $\dot{\gamma}$. A taxa de corte local é definida como a diferença entre velocidades para duas camadas separadas pela distância Δy (Fig. 1 b):

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{u(y + \Delta y) - u(y)}{\Delta y} \right\} \quad (2)$$

Para o escoamento de Couette temos:

$$\text{tensão: } \tau = \frac{F}{A} = \text{força} / \text{área de contacto, [N/m}^2\text{]} = [\text{Pa}]; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{taxa de corte: } \dot{\gamma} &= \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{h} = \text{gradiente de velocidade} = \\ &\text{velocidade placa} / \text{espaçamento, [1/s]}. \end{aligned} \quad (4)$$

Demonstrações

A taxa de deformação de corte $\dot{\gamma}$, além de representar o gradiente de velocidades, é também a taxa de variação temporal da deformação de corte ou distorção $d\gamma / dt$. A distorção γ é o ângulo formado entre uma linha de fluido que no tempo inicial é perpendicular aos planos das paredes (Fig. 1 a) e que após um certo intervalo de tempo t forma uma linha inclinada com a vertical. Nesse intervalo de tempo a camada de fluido colada à parede superior em movimento percorreu uma distância $l = Ut$ e a tangente do ângulo é:

$$\tan(\gamma) = \frac{l}{h} = \frac{Ut}{h} \quad (5)$$

Para intervalos de tempo pequenos, $t \rightarrow \Delta t$, e ângulos pequenos, $\gamma \rightarrow \Delta\gamma$, temos

$$\tan(\Delta\gamma) \approx \Delta\gamma = \frac{U\Delta t}{h} \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \right) = \frac{U}{h} \quad (6)$$

onde a taxa de deformação, ou deformação por unidade de tempo, é definida como:

$$\boxed{\dot{\gamma} = d\gamma / dt}. \quad (7)$$

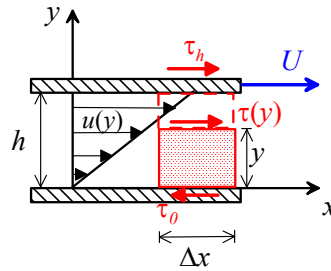


Fig. 2- Balanço de forças sobre elemento de fluido (a vermelho) em escoamento de Couette.

Para mostrar que neste escoamento a tensão é constante faz-se o balanço de forças sobre um elemento de fluido de forma paralelepípeda, com altura y , comprimento Δx e espessura Δz , situado entre $y = 0$ e $y = y$ (Fig. 2). Considerando que não existem forças normais de pressão, as únicas forças aplicadas são as resultantes das tensões de corte nas faces superior e inferior do paralelepípedo, com componentes segundo x de:

$$\tau_{yx}(y)\Delta x\Delta z = \tau_0\Delta x\Delta z \quad \tau_{yx}(y) = \tau_0 = Cte \quad (8)$$

onde τ_0 é a tensão constante que a parede inferior exerce sobre o fluido, em $y = 0$. Fica assim provado que a tensão de corte, que designamos simplesmente por $\tau \equiv \tau_{yx}$, não depende da posição y , sendo a tensão exercida pela placa superior sobre o fluido τ_h , segundo $+x$, igual à tensão τ_0 , com direcção $-x$. Uma outra forma de verificar a constância da tensão é escrever as equações de movimento para o escoamento de Couette e verificar que se reduzem a $\partial\tau_{yx}/\partial y = 0$; por consequência τ_{yx} é constante.

Na análise clássica do escoamento de Couette assume-se à partida que o perfil de velocidades é linear, ou seja:

$$u(y) = Ay + B \quad (9)$$

Aplicando as condições de não escorregamento, tem-se para a parede inferior estacionária,

$$u = 0 \text{ para } y = 0 \quad (10a)$$

e para a parede superior em movimento uniforme,

$$u = U \text{ para } y = h. \quad (10b)$$

o que fornece imediatamente $B = 0$ e $A = U / h$. Por isso o perfil de velocidades vem dado por:

$$u(y) = U \frac{y}{h} \quad (11)$$

com um gradiente de velocidades $du / dy = U / h$ constante e igual à taxa de deformação de corte $\dot{\gamma}$ (ver Eq. 6). Outra forma de se chegar a este resultado é considerando que para cada fluido existe uma relação biunívoca entre tensão e taxa de deformação,

$$\boxed{\tau = f(\dot{\gamma})} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\dot{\gamma} = f^{-1}(\tau)} \quad (12)$$

Assim, se τ é constante, como se mostrou acima, então $\dot{\gamma}$ é também constante. Logo, por integração da definição $\dot{\gamma} = \partial u / \partial y$, com as condições fronteira de não escorregamento, tem-se de imediato:

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y} = Cte \quad \Rightarrow u = \dot{\gamma} y \quad \text{com } \dot{\gamma} = U / h. \quad (13)$$

Viscosidade

A viscosidade surge como a “constante” de proporcionalidade entre a tensão de corte aplicada sobre um elemento de fluido e a sua taxa de deformação de corte. Em geral escreve-se

$$\boxed{\tau = \eta \dot{\gamma}} \quad (14)$$

onde η é o coeficiente de viscosidade. De acordo com os resultados da secção anterior para escoamento de Couette, a viscosidade é, fisicamente, a razão entre a força aplicada por unidade de área da placa superior, e a velocidade a que esta se move dividida pela separação entre placas:

$$\text{Viscosidade} = (\text{força/área}) / (\text{velocidade/separação}). \quad (15)$$

Se o coeficiente de viscosidade for constante, não dependendo do estado de deformação do fluido, diz-se que se trata de um fluido newtoniano e usa-se a letra μ para indicar a viscosidade. Uma generalização óbvia do fluido newtoniano é tomar η como uma função genérica da taxa de deformação $\dot{\gamma}$, isto é

$$\boxed{\eta = \eta(\dot{\gamma})} \quad (16)$$

Estes fluidos denominam-se fluidos não newtonianos de tipo GNF (*Generalized Newtonian Fluids*), ou fluidos newtonianos generalizados. O caso mais comum é o de fluidos em que a viscosidade diminui quando a taxa de corte aumenta

$$\eta(\dot{\gamma}) \downarrow \text{ com } \dot{\gamma} \uparrow \quad (17)$$

que se designam como fluidos reofluidificantes (*shear-thinning*, em inglês). O sangue é deste tipo, assim como as soluções poliméricas, por exemplo. A designação antiga para esta classe de materiais era de pseudoplásticos.

O caso inverso é o de fluidos em que a viscosidade aumenta com a taxa de corte,

$$\eta(\dot{\gamma}) \uparrow \text{ com } \dot{\gamma} \uparrow \quad (18)$$

que são designados como fluidos reoespessantes. A designação antiga era de fluidos dilatantes. O exemplo clássico é o de uma suspensão de grãos de areia em água líquida (areia movediça).

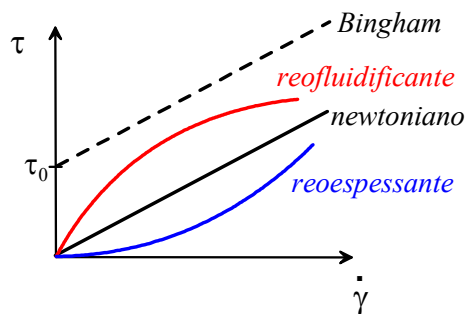


Fig. 3- Comportamentos reológicos típicos no diagrama tensão – deformação.

Portanto, para um material newtoniano a tensão aumenta linearmente com a taxa de deformação, sendo nula quando esta é nula. Para um material não newtoniano reofluidificante a tensão de corte apresenta um aumento com a taxa de deformação que é inferior a linear. Para um material reoespessante o aumento é superior a linear. Tanto o reofluidificante como reoespessante têm tensão nula para taxa de deformação nula. A Fig. 3 ilustra graficamente este comportamento. Inclui ainda um outro tipo de material designado como plástico de Bingham, ou material com tensão de cedência. Nestes materiais (por vezes designados como viscoplásticos), o comportamento é de sólido indeformável enquanto a tensão é inferior à tensão de cedência (τ_0), e de líquido newtoniano para valores superiores da tensão. O sangue apresenta este tipo de comportamento, embora τ_0 seja pequeno; outros exemplos são a pasta de dentes e a maionese.

A ciência que estuda o escoamento e a deformação dos materiais chama-se Reologia. Daí as designações de reofluidificante e reoespessante para materiais que ficam mais fluidos, ou mais espessos, quando sujeitos a deformação. À Reologia cabe a medição da viscosidade, e de outras propriedades materiais que servem para caracterizar o escoamento e a deformação dos vários materiais.

Medição de viscosidade

Na prática a utilização do escoamento de Couette plano, como o da Fig. 1, para medir a viscosidade de um material não é viável porque se torna impossível limitar o dispositivo. No entanto, um escoamento semelhante em coordenadas cilíndricas é já susceptível de realização prática. Um viscosímetro de copos rotativos consiste em dois cilindros verticais concêntricos que podem ser submetidos a um movimento de rotação, em simultâneo ou só um deles. Estes cilindros estão separados por um espaçamento muito pequeno em relação ao seu raio. O material cuja viscosidade se pretende medir é colocado no espaço entre os cilindros, no arranjo mais comum o cilindro exterior é submetido a uma rotação com velocidade angular ω ,

e o binário necessário para manter o cilindro interior fixo é medido T . A relação entre o binário e a velocidade de rotação permite obter a viscosidade.

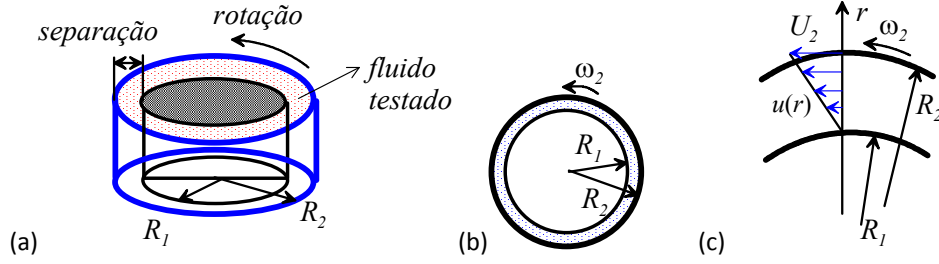


Fig. 4- Viscosímetro de copos concêntricos (a), escoamento de Couette circular (b), detalhe do perfil de velocidades (c).

A Fig. 4 mostra esta geometria. Quando a separação entre cilindros é pequena, $h = R_2 - R_1 \ll R_1$, as fórmulas dadas acima para a geometria plana de Couette continuam a ser válidas. Relembramos que um binário é uma força multiplicada pelo braço ou raio de rotação,

$$T = Fr \quad (19)$$

e que velocidade linear e velocidade angular estão relacionada por:

$$u = \omega r \quad (20)$$

em movimento rotativo circular. No escoamento de Couette circular (Fig. 4 b) o binário conserva-se, ou seja o binário aplicado no cilindro exterior é igual ao binário que o fluido exerce sobre o cilindro interior:

$$T_2 = F_2 R_2 \text{ e } T_1 = F_1 R_1 \text{ com } T_2 = T_1 \quad (21)$$

Para que o cilindro interior fique estacionário (não se mova), é necessário que lhe seja aplicado um binário igual a T_1 mas de sentido contrário. Este será o binário medido pelo aparelho e relaciona-se com a viscosidade da seguinte forma. A taxa de corte é aproximadamente constante sendo obtida de:

$$\dot{\gamma} = \frac{U_2}{R_2 - R_1} = \frac{\omega R_2}{h} \quad (22)$$

Da Eq. (14), a viscosidade vem:

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{F_1 / A_1}{U_2 / h} = \frac{T_1 / 2\pi L R_1^2}{\omega_2 R_2 / h} = \frac{T_1 h}{2\pi \omega_2 R_2 R_1^2 L}$$

E a expressão final, com diâmetros em lugar de raios, é

$$\eta = \frac{4T_1 h}{\pi \omega_2 (1 + 2 \frac{h}{D_1}) D_1^3 L} \approx \frac{4T h}{\pi \omega D^3 L} \quad (23)$$

onde a aproximação na igualdade da esquerda se baseia em $h/D_1 \ll 1$ e se usam valores nominais para o diâmetro D , o binário T (torque) e a velocidade angular ω . Esta é relacionada com a frequência f [s^{-1}]=[Hz] através de:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{n[rpm]}{60} \quad (24)$$

onde n é o número de rotações por minuto impostas ao cilindro exterior.

Escoamento laminar em tubos

Uma aplicação biomédica óbvia da mecânica dos fluidos é o estudo do movimento do sangue nas artérias e veias do corpo humano. Se modelarmos estes vasos como tubos de secção circular, e se considerarmos que as velocidades são relativamente baixas de forma ao regime de escoamento ser laminar (definição abaixo) então será útil obtermos expressões que permitam calcular o caudal volumétrico que existe para uma certo gradiente de pressões aplicado ou, por exemplo, calcular a tensão de corte na parede.

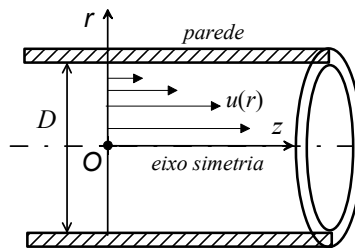


Fig. 5- Detalhe do escoamento em tubo circular.

A Fig. 5 mostra o esquema da geometria com simetria cilíndrica. O tubo tem diâmetro $D = R/2$, onde R é o raio, e assume-se que o escoamento está completamente desenvolvido, não havendo por isso variações das propriedades ao longo da direcção axial do tubo, z . Como se verá, o perfil de velocidades $u(r)$ é então parabólico, isto é $u(r) \sim r^2$.

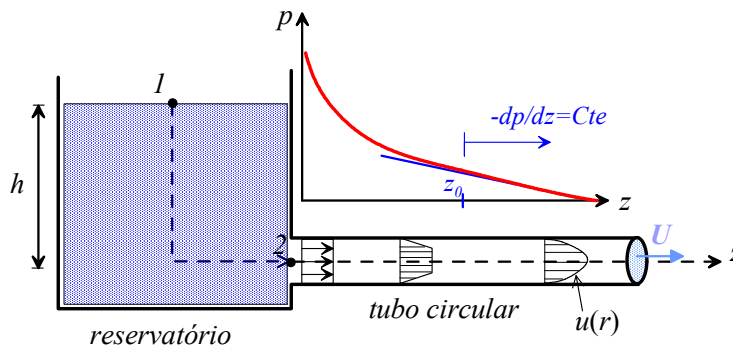


Fig. 6- Geração de escoamento completamente desenvolvido em tubo circular. O perfil de velocidades parabólico acontece quando o decaimento da pressão é linear ao longo do tubo.

A Fig. 6 mostra um dispositivo que permitiria criar um escoamento completamente desenvolvido num tubo. A pressão na secção à entrada do tubo é igual ao peso da coluna de água desde esse ponto até à superfície livre do tanque, $p_2 = p_1 + \rho gh$. Se o tanque for considerado de grandes dimensões comparativamente ao tubo, essa pressão irá manter-se constante durante o escoamento. O líquido dentro do tubo é submetido ao um diferencial de pressões e começa a movimentar-se. O perfil de velocidades é inicialmente de tipo “tampão” (perfil uniforme), evoluindo para uma forma parabólica à medida que a secção onde o perfil é obtido se afasta da secção de entrada. A partir de determinada distância z_0 o perfil de velocidades deixa de mudar de forma, e mantém-se constante. A variação da pressão é então linear, isto é $-dp/dz = Cte = P$. Diz-se que se atingiu o desenvolvimento completo.

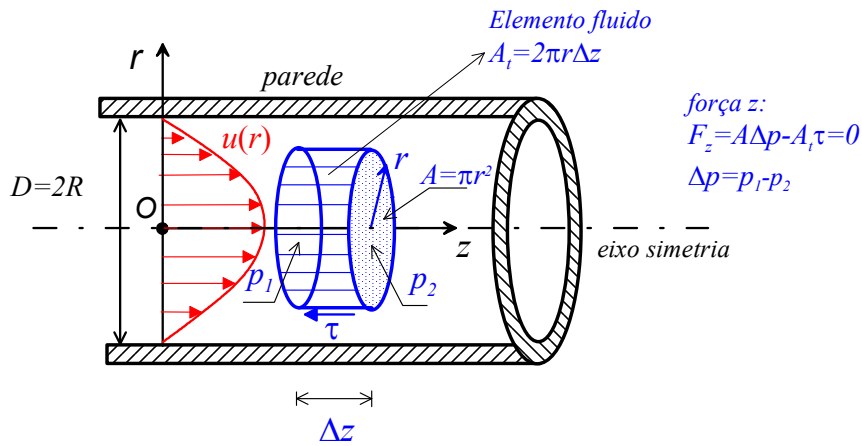


Fig. 7- Balanço de forças sobre elemento de fluido (a azul).

Um balanço de forças a uma porção cilíndrica de fluido de raio r e comprimento Δz , mostrado a azul na Fig. 7, dá:

$$\tau A_t = \Delta p A = \Delta p (\pi r^2) \quad \text{com } \Delta p = p_1 - p_2 \text{ e } \Delta z = z_2 - z_1$$

A área de contacto onde a tensão de corte (assumida como positiva na direcção $-z$) está aplicada é $A_t = 2\pi r \Delta z$ e o balanço reduz-se a:

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{\Delta z} r = \frac{1}{2} P r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{1}{2} P r} \quad (25)$$

onde $P = -dp/dz$ é a magnitude do gradiente de pressão aplicado, a força motriz para gerar o movimento. P é constante e tem valor positivo para escoamento a processar-se na direcção $+z$. Esta expressão permite desde logo calcular a tensão de corte na parede, $\tau_w = |\tau(r = R)|$:

$$\boxed{\tau_w = \frac{1}{2} P R} \quad (26)$$

Para se obter o perfil de velocidades integra-se a expressão anterior, após substituir τ pela lei de Newton da viscosidade, com $\dot{\gamma} = -du/dr$ (para que $\dot{\gamma}$ seja positivo):

$$\tau = \frac{1}{2} Pr = -\mu \frac{du}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dr} = -\frac{P}{2\mu} r \quad \Rightarrow \quad \int du = -\int \frac{P}{2\mu} r dr$$

que dá:

$$u = -\frac{P}{4\mu} r^2 + C_1$$

Usando a condição fronteira de não escorregamento na parede, temos:

$$0 = -\frac{P}{4\mu} R^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{P}{4\mu} R^2$$

e o perfil fica:

$$u = \frac{PR^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = U_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)} \quad (27)$$

onde a velocidade máxima, no eixo do tubo, é dada por:

$$\boxed{U_0 = \frac{PR^2}{4\mu}} \quad (28)$$

A forma do perfil é parabólica (variação em r^2) com velocidade nula na parede e valor máximo no eixo, como é mostrado esquematicamente na Fig. 7. O caudal é calculado integrando o perfil de velocidades sobre a secção transversal do tubo:

$$Q = \int_0^R u(r) 2\pi r dr = 2\pi U_0 \int_0^R \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) r dr$$

que dá:

$$Q = 2\pi U_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{R^2} \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi R^2 U_0}{2}$$

e portanto a velocidade média é:

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{U_0}{2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{U = \frac{PR^2}{8\mu}} \quad (29)$$

Esta equação representa a lei de Hagen-Poiseuille, que permite relacionar o caudal, ou velocidade média no tubo, com o gradiente de pressão aplicado. Veja-se que a velocidade máxima é o dobro da velocidade média. A velocidade média é directamente proporcional ao quadrado do raio e ao gradiente de pressão, e inversamente proporcional à viscosidade. O caudal volumétrico é directamente proporcional ao raio (ou diâmetro) levantado à quarta potência.

O perfil de tensão de corte é linear como mostrado pela Eq. (25). O valor máximo da tensão de corte, em valor absoluto, ocorre na parede, e a Eq. (26) pode agora escrever-se como:

$$\boxed{\tau_w = 4\mu \frac{U}{R}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\tau_w = 8\mu \frac{U}{D}} \quad (30)$$

O coeficiente de atrito na parede é definido como:

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}, \quad \text{vindo} \Rightarrow \boxed{f = \frac{16}{Re}} \quad (31)$$

onde o número de Reynolds foi definido como:

$$\boxed{Re = \frac{\rho U D}{\mu}} \quad (32)$$

Regimes de escoamento e comprimentos para desenvolvimento completo

O regime dinâmico de escoamento é:

$$\text{Laminar, } Re < 2000 \quad (33a)$$

$$\text{Turbulento, } Re > 4000 \quad (33b)$$

$$\text{Transição, } 2000 \leq Re \leq 4000. \quad (33c)$$

O escoamento do sangue ocorre tipicamente em regime laminar, excepto por vezes na aorta descendente em situações de esforço (treino de atletas, por exemplo), ou pontualmente em vasoconstricções de natureza patológica (estenoses), onde o escoamento é localmente turbulento. Para escoamento turbulento a velocidade oscila localmente de forma aleatória e só faz sentido, do ponto de vista de engenharia ou em aplicações biomédicas, considerar valores médios no tempo. O perfil da velocidade média (não confundir com a média na secção dada pela Eq. 29) deixa de ser dado pela Eq. (27) (de facto segue uma variação do tipo $u = U_0 \left(1 - (r/R)^{1/7}\right)$), a tensão na parede aumenta substancialmente, assim como o factor de atrito f que fica muito maior do que o dado pela Eq. (31).

O comprimento necessário para se atingir a condição de desenvolvimento completo a partir de uma entrada com perfil de velocidades uniforme (ver Fig. 6) é dado, em função do número de Reynolds, por:

$$\frac{z_0}{D} = 0.06 Re \quad (34)$$

Por exemplo, para um número de Reynolds típico de 200, é necessário um comprimento de tubo de 12 diâmetros para se atingir a situação de desenvolvimento completo. Na prática, é difícil no sistema circulatório satisfazer esta condição porque existem ramificações consecutivas dos vasos, separadas por distâncias inferiores a esse comprimento.

Equação de Bernoulli

Esta equação exprime a conservação de energia mecânica em escoamento invíscido (sem viscosidade) e permite relacionar variações de pressão p , velocidade u , e altura (cota) h :

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 + \rho g h_2 \quad (35)$$

Os valores destas propriedades são obtidos nos pontos 1 e 2 ao longo de uma linha de corrente.

Esta equação não toma em conta perdas de carga, devidas a atrito nas paredes duma conduta ou presença de obstruções ou variações de área transversal, uma vez que estas perdas são fenómenos irreversíveis relacionados intimamente com a existência de viscosidade. É no entanto fácil generalizar a equação de Bernoulli por forma a contabilizar perdas de carga e trabalho produzido:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} u_1^2 + g h_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} u_2^2 + g h_2 + w + e_v \quad (36)$$

onde: e_v - energia por unidade de massa [J/kg] dissipada devido a viscosidade;

w - trabalho específico produzido pelo fluido (a sair do sistema).

A perda de carga no escoamento completamente desenvolvido em tubo circular de comprimento L e diâmetro D calcula-se a partir de

$$\Delta p_v = \rho e_v = 4f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (36a)$$

onde f é o coeficiente de atrito definido pela Eq. (31) e U é a velocidade média na secção (na Eq. 36, $u_1 = u_2 = U$).

As velocidades que aparecem na Eq (35) são valores locais quando os índices 1 e 2 correspondem a localizações pontuais no seio do campo de velocidades, pontos ligados por uma linha de corrente, a situação mais comum quando se aplica a equação de Bernoulli. Por outro lado, quando a equação é aplicada como um balanço de energia mecânica a um volume de controlo, essas velocidades são valores médios, com os índices 1 e 2 a referirem-se às secções de entrada e de saída duma conduta (Fig. 8). Neste segundo caso os valores médios são obtidos por integração na secção transversal do cubo da velocidade a dividir pela respectiva velocidade média ($u_1^2 \equiv \langle u_1^3(r) \rangle / \langle u_1(r) \rangle$). Deve referir-se que esses valores não são em geral iguais ao cubo da média (isto é, $\langle u_1^3(r) \rangle \neq \langle u_1(r) \rangle^3 \equiv U_1^3$), pelo que se deve introduzir um factor correctivo,

$$u_1^2 = \beta_1 U_1^2 \text{ ou } u_2^2 = \beta_2 U_2^2, \quad (37)$$

com $\beta = 1$ (perfil de velocidades uniforme; válido para escoamento turbulento)

$\beta = 2$ (perfil de velocidades parabólico, Eq 27; válido para escoamento laminar).

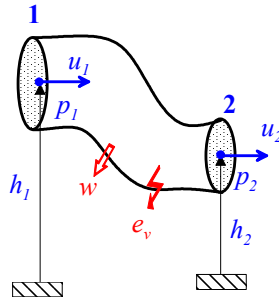


Fig. 8- Volume de controlo para aplicação do balanço de energia mecânica (Eq. Bernoulli).

Como indicado acima, usa-se a notação da subsecção anterior para indicar a média calculada segundo a Eq. (29),

$$U_1 \equiv \langle u_1(r) \rangle = \frac{1}{\pi R_1^2} \int_0^{R_1} u_1(r) 2\pi r dr \quad (38)$$

ilustrada para uma secção circular de raio R_1 .

Exemplos de aplicação da equação de Bernoulli:

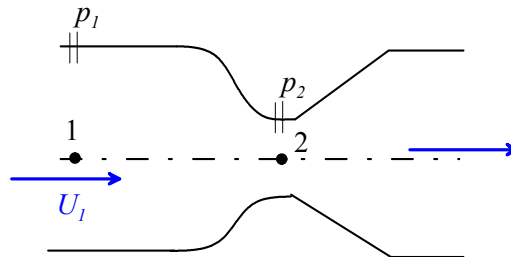


Fig. 9- Esquema do venturi

(i)- Venturi

Um venturi consiste numa contracção relativamente suave do escoamento numa conduta que permite fazer a medição do caudal que circula nessa conduta, através de duas medições de pressão. A Fig. 9 mostra esquematicamente o dispositivo, com as pressões a serem medidas nas secções 1 (seio da conduta) e 2 (garganta do venturi).

Considerando que o venturi é horizontal, a equação de Bernoulli dá:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \rho (U_2^2 - U_1^2) = p_1 - p_2$$

Resolvendo para a velocidade no ponto 1, e usando a conservação de massa (ver abaixo) $U_2 / U_1 = A_1 / A_2$, onde A_1 e A_2 são as áreas das secções na conduta e na parte mais estreita do venturi, temos:

$$U_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)}}$$

As pressões em 1 e 2 são medidas com um manómetro diferencial, e a razão entre as áreas na conduta e na garganta do venturi é conhecida. Finalmente, o caudal vem dado por:

$$Q = cA_1U_1$$

onde c é um factor correctivo, a ser obtido por calibração, e que faz o ajuste para o facto do fluido não ser perfeito (na verdade, o fluido possui viscosidade).

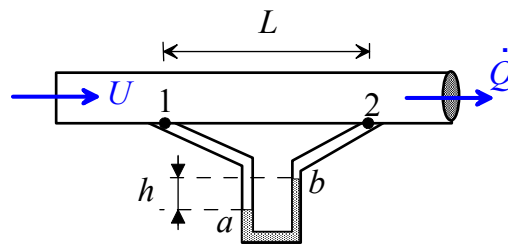


Fig. 10- Manómetro diferencial.

(ii)- Medição de pressão

A Fig. 10 mostra um manómetro diferencial, cuja leitura dá o desnível h do líquido manométrico (ρ_{liq}), permitindo obter a perda de pressão no escoamento de um fluido, com massa volúmica ρ , numa conduta. Assumindo que as velocidades nos tubos que fazem a ligação ao manómetro são desprezáveis, a aplicação da Eq. de Bernoulli (Eq. 35) entre o ponto 1 e o ponto a dá:

$$p_1 + \rho gh_1 = p_a + \rho gh_a$$

entre o ponto 2 e o ponto b :

$$p_2 + \rho gh_2 = p_b + \rho gh_b$$

e entre o ponto a e o ponto b :

$$p_a + \rho_{liq}gh_a = p_b + \rho_{liq}gh_b$$

Combinando estas equações tem-se:

$$p_1 - p_2 = p_a - p_b + \rho g(h_a - h_b) \quad (\text{uma vez que } h_1 = h_2)$$

e

$$p_a - p_b = \rho_{liq}g(h_b - h_a)$$

ou seja,

$$p_1 - p_2 = gh(\rho_{liq} - \rho).$$

com $h = h_b - h_a$. O desnível h é lido do manómetro, a diferença $\Delta\rho = \rho_{liq} - \rho$ entre as massas volúmicas do líquido manométrico e do fluido que se pretende medir é conhecida, e a perda de pressão na conduta vem imediatamente de $\Delta p = gh\Delta\rho$. Se o escoamento na conduta estiver completamente desenvolvido, o gradiente de pressão (uma constante) vem $P = \Delta p / L$ (onde o Δp é o Δp_v da Eq (36a) que resulta duma perda de carga de natureza viscosa).

Conservação de massa

Para um volume de controlo (Fig. 11) com várias entradas e várias saídas de massa tem-se:

$$\sum_{entradas} \dot{m}_{in} = \sum_{saídas} \dot{m}_{out} \quad (39)$$

uma vez que a massa é uma propriedade extensiva que se conserva.

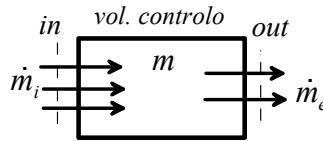


Fig. 11- Volume de controlo e conservação de massa.

Esta equação de conservação de massa é válida em regime permanente. O símbolo \dot{m}_i representa o caudal mássico através da conduta i , relacionado com a velocidade média através de:

$$\dot{m}_i = \rho_i A_i U_i \quad [\text{kg/s}] \quad (40)$$

onde: ρ_i - massa volúmica na secção i [kg/m^3]

A_i - área da secção transversal [m^2] (para tubo circular, $A_i = \pi D_i^2 / 4$)

U_i - velocidade média na secção i [m/s]

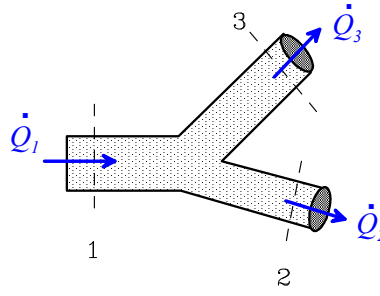


Fig. 12- Ramificação de conduta

Por exemplo, para a Fig. 12 a conservação de massa escreve-se:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \quad (41)$$

Os escoamentos de líquidos (água; sangue; etc) podem normalmente ser considerados como incompressíveis, com volume específico constante $\rho = Cte$. Neste caso pode ser conveniente dividir a Eq. (41) pela massa volúmica ($\rho = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3$) e trabalhar com o caudal volumétrico:

$$\dot{Q}_i = \frac{\dot{m}_i}{\rho_i} = A_i U_i \quad [\text{m}^3/\text{s}]. \quad (42)$$

Para a bifurcação ilustrada na Fig 12 tem-se

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 \quad \Rightarrow A_1 U_1 = A_2 U_2 + A_3 U_3 \quad (43)$$

Sabendo o caudal de entrada \dot{Q}_1 , e a percentagem de caudal que segue pela conduta 3, por exemplo (fracção extraída, $\zeta = \dot{Q}_3 / \dot{Q}_1$), podemos facilmente obter as velocidades médias nos ramos de saída, $U_2 = (1 - \zeta) \dot{Q}_1 / A_2$ e $U_3 = \zeta \dot{Q}_1 / A_3$.

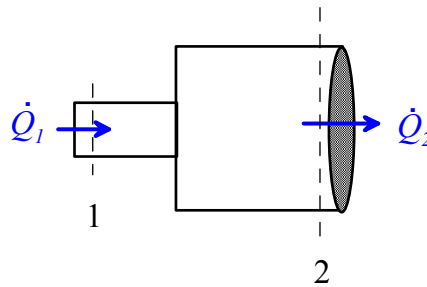


Fig. 13- Expansão em tubo redondo.

Como segundo exemplo de ilustração da conservação de massa, veja-se o caso do escoamento numa expansão, Fig. 13. O caudal \dot{Q}_1 circula num tubo circular de diâmetro D_1 e subitamente

passa para um tubo de maior dimensão D_2 (razão de expansão $\beta = D_2 / D_1$). A relação entre velocidades médias nas duas secções é obtida através da conservação de caudal,

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 \Rightarrow A_1 U_1 = A_2 U_2 \Rightarrow U_2 = \frac{A_1}{A_2} U_1 = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 U_1 = \frac{1}{\beta^2} U_1 \quad (44)$$

Se a razão de expansão for de 2, a velocidade no tubo maior será 4 vezes mais pequena do que a velocidade à entrada. Considerando que o fluido é perfeito e não há perdas de carga, pode aplicar-se Eq. de Bernoulli entre as secções 1 e 2 para obter a variação de pressão:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2 \Rightarrow p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (U_1^2 - U_2^2) = \frac{1}{2} \rho U_1^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^4} \right) \quad (45)$$

Na realidade o escoamento na expansão (ou numa contracção, se o escoamento fosse no sentido inverso) irá implicar uma perda de carga localizada e por isso a equação de Bernoulli deveria ser aplicada com o termo de perda (Eq. 36). Mesmo assim esta relação é útil por mostrar um facto corrente: quando a velocidade aumenta, a pressão diminui (e vice-versa).