



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Notas para Transmissão de Calor

P.J. Oliveira

(Janeiro - Julho 2015)

Departamento de Engenharia Electromecânica
6201-001 Covilhã

Conteúdo

1. Introdução à Transmissão de Calor	5
1.1 Condução	
1.2 Convecção	
1.3 Radiação	
1.4 Exemplos resolvidos	
1.5 Exercícios	
2. Condução de Calor em Regime Permanente	11
2.1 Placa plana	
2.2 Várias placas planas	
2.3 Placa plana com convecção	
2.4 Casca cilíndrica	
2.5 Várias cascas cilíndricas com convecção	
2.6 Casca esférica	
2.7 Várias cascas esféricas com convecção	
2.8 Geração interna de calor	
2.9 Exemplos	
2.10 Anexo 1 - Material avançado: Equação diferencial da condução de calor	
2.11 Exercícios	
3. Condução Estacionária: Raio Crítico	27
3.1 Caso da geometria cilíndrica	
3.2 Caso da geometria esférica	
3.3 Exemplo ilustrativo	
3.4 Exercícios	
4. Condução Estacionária: Alhetas	31
4.1 Equação da alheta	
4.2 Parâmetros de desempenho das alhetas	
4.3 Alheta infinita	
4.4 Alheta com fluxo de calor nulo na extremidade	
4.5 Superfícies com alhetas	
4.6 Gráficos de eficiência de alhetas	
4.7 Tabelas para alhetas	
4.8 Exemplos de ilustração	
4.9 Anexo - Dedução de algumas fórmulas para alhetas com área de secção constante	
4.10 Exercícios	
5. Condução de Calor em Regime Variável	47
5.1 Análise uniforme	
5.2 Análise não uniforme	
5.2.1 Placa plana infinita	
5.2.2 Cilindro infinito	
5.2.3 Esfera	
5.2.4 Corpo semi-infinito	
5.3 Princípio da sobreposição	
5.4 Exemplos ilustrativos	
5.5 Anexo 1 - Material avançado: Soluções analíticas para placa plana, cilindro e esfera	
5.6 Anexo 2 - Tabelas para condução em regime variável	
5.7 Anexo 3 - Gráficos de Heisler	
5.8 Exercícios	
6. Convecção Natural	67
6.1 Introdução	
6.2 Escoamentos exteriores (camada limite)	

6.3	Escoamentos interiores em recintos fechados	
6.4	Convecção natural em alhetas	
6.5	Exemplos ilustrativos	
6.6	Anexo Avançado 1- Equações para convecção natural em placa plana vertical	
6.7	Exercícios	
7.	Convecção Forçada	79
7.1	Introdução	
7.2	Escoamentos exteriores (camada limite)	
7.2.1	Placa plana	
7.2.2	Cilindro	
7.2.3	Esfera	
7.2.4	Várias formas	
7.3	Escoamentos interiores	
7.3.1	Tubos lisos	
7.3.2	Tubos rugosos	
7.3.3	Comprimentos de desenvolvimento	
7.3.4	Coefficientes de atrito	
7.4	Anexo - Dedução da diferença média logaritmica	
7.5	Exemplos ilustrativos	
7.6	Exercícios	
8.	Radiação	95
8.1	Noções de base	
8.2	Balances de radiação em superfícies	
8.3	Factor de forma	
8.4	Transferência de radiação entre superfícies	
8.5	Recinto com duas superfícies	
8.5.1	Objecto pequeno em cavidade grande	
8.5.2	Placas paralelas infinitas	
8.5.3	Cilindro concêntricos infinitos	
8.5.4	Esferas concêntricas	
8.6	Anexo 1 - Material avançado: Resolução do balanço convecção/radiação numa superfície	
8.7	Anexo 2- Material avançado: Factor de forma	
8.8	Exemplos resolvidos	
8.9	Tabelas: Fracção de energia radiada pelo corpo negro	
8.10	Exercícios	
Fim		109

Cap. 1 – Introdução à Transmissão de Calor

Termodinâmica: ciência que estuda a energia, a interacção entre energia e matéria, e os processos de conversão entre as diferentes formas de transferência de energia, sobretudo o calor Q e o trabalho W . Relaciona a quantidades de energia transferidas através da fronteira de um sistema (Q e W) com a variação de energia dentro do sistema. Assenta sobretudo em dois princípios. A 1ª Lei diz que a energia se conserva e a 2ª Lei impõe restrições sobre a direcção de transferência do calor (quente para frio). Matematicamente:

1ª Lei, processo finito: $\Delta U = Q + W$; processo diferencial: $dU = \delta Q + \delta W$ [J]

(Nota: variação de energia interna, $\Delta U = U_2 - U_1$)

2ª Lei, processo finito: $\Delta S \geq \sum_r Q_r / T_r$; processo diferencial: $dS \geq \delta Q_r / T_r$ [J/K]

(Nota: sinal igual, para processo reversível; maior que, para processo irreversível)

(Nota: Q_r e T_r , calor e temperatura do reservatório r ; $Q = \sum_r Q_r$)

Transmissão de Calor: ciência que estuda as transferências de energia sob forma de calor, estando interessada não só na quantidade de calor que é transferida (Q , [J]), mas também na taxa temporal a que essa transferência decorre (\dot{Q} , [W]). Assim, num problema de transmissão de calor o tempo é uma variável importante, distinguindo-se a situação em que uma determinada quantidade de calor se transfere num intervalo de tempo curto daquela em que o mesmo calor demora mais tempo a transferir-se. Na termodinâmica (clássica) os sistemas em estudo estão em equilíbrio (só assim se podem definir as propriedades de estado do sistema).

Na transmissão de calor os sistemas em estudo estão inerentemente em desequilíbrio: a temperatura tem de variar no espaço para que haja transferência de calor.

Uma forma simplista de distinguir estas duas ciências é considerar que na Termodinâmica o sistema em estudo pode ser visto essencialmente como uma caixa preta (não é preciso saber os pormenores do que está dentro do sistema); na Transmissão de Calor é preciso caracterizar exactamente o sistema (por exemplo, na transferência de calor através de uma parede, precisamos saber exactamente a constituição dos materiais que compõem a parede, e as espessuras de cada camada).

Nas aplicações práticas de Transmissão de Calor pode haver dois objectivos:

1. Maximizar a taxa de transferência de calor (permutadores de calor mais eficientes; superfícies de troca de calor com alhetas; etc.);
2. Minimizar a taxa de transferência de calor (isolamento térmico).

Podem distinguir-se três **modos de transferência de calor**, que muitas vezes aparecem misturados, mas que são descritos separadamente de seguida:

1. **Condução**
2. **Convecção**
3. **Radiação**

1.1 Condução

Transferência de energia resultante de fenômenos difusivos devidos à propagação de vibrações moleculares, ou outros movimentos a nível atômico, quando moléculas vizinhas interagem entre elas. Este mecanismo requer uma interpretação atômica/molecular da constituição da matéria (apesar da condução de calor em si ser analisada como um fenômeno macroscópico). Incluem-se nas interações acima referidas, as seguintes: a migração de electrões livres, nos metais (que são também bons condutores de electricidade); as vibrações de baixa frequência (fonões) das estruturas reticulares, nos cristais puros (por exemplo, no diamante); os choques aleatórios entre moléculas, nos gases. A condução ocorre no seio de qualquer material, mas é mais intensa nos materiais sólidos, diminuindo de intensidade nos líquidos, e ainda mais nos gasosos (o que se entende, considerando as respectivas estruturas moleculares).

Para que haja condução de calor tem de existir uma diferença de temperaturas, e o fluxo de calor obedece à **lei de Fourier**:

$$\dot{Q} = kA \frac{\Delta T}{L} \quad [\text{W}] \quad \text{ou, em termos locais:} \quad \vec{q} = -k \vec{\nabla} T \quad [\text{W/m}^2]$$

\dot{Q} - taxa de transferência de calor (potência térmica) [W];

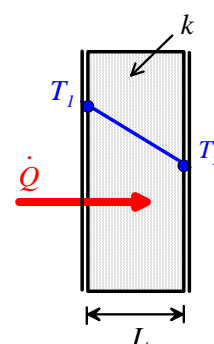
k - condutibilidade térmica [W/m K];

A - área da superfície transversal através da qual se dá a transferência de calor [m²];

$\Delta T = T_1 - T_2$ - diferença entre as temperaturas aplicadas a cada face [K];

L - distância entre as duas superfícies, ou espessura do meio [m];

\vec{q} - vector fluxo de calor, cuja magnitude é designada $q = \dot{Q} / A$ [W/m²].



A condutibilidade térmica é uma propriedade física do material, definida como a quantidade de energia térmica transferida por unidade de área e por unidade de tempo, devido à condução de calor através de uma fatia de material com espessura unitária, quando se aplica uma diferença de temperatura de 1°C entre cada face.

Tabela 1 – Condutibilidades Térmicas Típicas

Material	k [W/m.K]	c_p [J/kg.K]	ρ [kg/m ³]
Diamante	2300	509	3500
Prata	429	235	10 500
Cobre	401	385	8933
Ouro	317	129	19 300
Alumínio	237	903	2702
Ferro	80.2	447	7870
Mercúrio (l)	8.54	139	13 562
Vidro	0.78	750	2500
Tijolo	0.72	835	1920
Água (l)	0.613	4177	997
Pele (humana)	0.37		
Madeira (carvalho)	0.17	2385	545
Hélio (g)	0.152	5197	0.163
Borracha (mole)	0.13	2010	1100
Fibra vidro	0.043	835	16
Ar (g)	0.026	1005	1.177
Poliuretano (espuma rígida)	0.026	1045	70
Superisolante	2×10^{-5}		

1.2 Convecção

Transporte de energia devido ao movimento (macroscópico) do meio. Ocorre dentro de fluidos (líquidos ou gases) que se deformam e cujos elementos (macroscópicos) de fluido se movem relativamente uns aos outros, segundo um determinado campo de velocidades \vec{v} [m/s]. O fluxo convectivo da energia interna é expresso localmente como:

$$\vec{q}_c = \rho \vec{v} u \quad [\text{W/m}^2]$$

em que:

ρ [kg/m³] - massa volúmica do fluido;

u [J/kg] - energia interna específica;

U [J] - energia interna [J], com $u = U / m$.

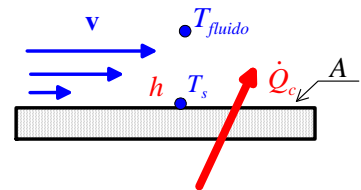
Um problema com convecção é mais complicado do que um problema que envolva unicamente condução de calor, pois requer o conhecimento do campo de velocidades (que pode depender, por sua vez, do campo de temperaturas): mecânica dos fluidos. As equações diferenciais fundamentais que governam o transporte convectivo são muito mais complicadas do que a equação que governa o transporte por condução. Por isso recorre-se frequentemente a expressões empíricas que fornecem o coeficiente de transmissão de calor por convecção, h , definido pela Lei de Newton:

Lei de Newton do arrefecimento: $\dot{Q}_c = Ah(T_s - T_\infty)$ [W]

h - coeficiente de transferência de calor por convecção [W/m² K], ou coeficiente convectivo (por vezes indica-se h_c para ficar claro que é devido à convecção); depende da geometria e das propriedades do fluido.

T_s - temperatura da superfície [K];

T_∞ - temperatura do fluido longe da superfície [K].



Muitas vezes a convecção é entendida como uma forma de transferência de calor mista, entre uma parede sólida e um fluido circundante, com condução de calor através do sólido até à interface sólido/fluido, seguida por condução, ainda, entre a superfície e a lâmina de fluido estagnado adjacente (não havendo movimento, é condução através do fluido), e finalmente convecção por movimento relativo entre elementos (porções macroscópicas) de fluido, que se deslocam a velocidades diferentes, promovendo o transporte de energia térmica.

O movimento do fluido pode ser produzido por uma força exterior ao meio (por exemplo, uma bomba hidráulica que faz fluir água ao longo de um tubo), ou por diferenças de temperatura entre elementos do próprio meio fluido que irão, por sua vez, induzir diferenças de massa volúmica. Elementos de fluido com temperatura mais elevada tendem a subir por impulsão, e porções de fluido mais frio tendem a descer, gerando-se assim um movimento do fluido sem que seja necessária uma «força motriz» externa. Ao primeiro caso, chamamos **convecção forçada**, e ao segundo **convecção livre** (ou natural):

- **Convecção forçada:** movimento devido ao efeito de uma bomba, um ventilador, ou outra força motriz externa (com fonte de energia externa);
- **Convecção livre:** movimento devido a diferenças de massa volúmica ρ num campo gravítico g (sem fonte de energia externa).

O coeficiente convectivo varia consoante se trate de um fluido gasoso ou líquido, aumentando quando a convecção é forçada comparativamente à livre. Quando a transferência de calor se dá para um fluido que muda de fase (condensação ou ebulição), os valores do coeficiente convectivo tornam-se extremamente elevados. A Tabela 2 apresenta valores típicos para cada caso.

Tabela 2 – Valores típicos de coeficiente convectivo

Tipo de Convecção	h [W/m ² K]
Livre, gases	2 – 25
Livre, líquidos	10 – 1000
Forçada, gases	25 – 250
Forçada, líquidos	50 – 20 000
Evaporação; Condensação	2500– 100 000

1.3 Radiação

Propagação de energia por intermédio de ondas electromagnéticas, emitidas sempre que os átomos que compõem um corpo material passam de um estado de não equilíbrio para um estado de equilíbrio (mecânica quântica). Como qualquer onda, a radiação é caracterizada por: comprimento de onda (λ); frequência (ν); e velocidade de propagação (c). Tem-se $\lambda = cT = c/\nu$ (o período T é o inverso da frequência), e a velocidade de propagação da radiação num meio qualquer está relacionada com a velocidade da luz no vácuo (uma constante universal) por $c = c_0/n$ (n - índice de refração do meio; $c_0 \cong 300\,000$ km/s). A radiação térmica, emitida por qualquer corpo cuja temperatura seja superior a 0 K, corresponde à radiação na faixa de comprimentos de onda $\lambda = 0.1$ a $100\,\mu\text{m}$. A radiação visível tem $\lambda = 0.40$ a $0.76\,\mu\text{m}$ (do violeta, pequeno comprimento de onda e alta frequência, ao vermelho, maior comprimento de onda e baixa frequência), e corresponde a cerca de metade do espectro da radiação solar, que vai de $\lambda = 0.1\,\mu\text{m}$ (no ultravioleta, UV) a $3\,\mu\text{m}$ (no infravermelho, IV).

A radiação térmica depende da temperatura do corpo que a emite. Desta forma, o mecanismo de emissão estará relacionado com o movimento de vibração e rotação das moléculas, átomos e electrões que compõem o material (a agitação térmica aleatória das partículas). A radiação térmica só é visível quando a temperatura se torna superior a cerca de 800 K; um corpo aquecido começa a emitir radiação vermelha quando a temperatura é 1000 K.

A radiação ocorre mesmo através do vácuo (isto é, ao contrário da condução e da convecção, não é necessário um meio material, sólido ou fluido, para que se dê a transferência de energia). Uma outra diferença é que as equações que governam a transferência de energia por radiação são do tipo *integral*, enquanto as equações da condução e convecção são *diferenciais*.

A **lei de Stefan-Boltzmann** da radiação diz que o fluxo de energia radiante emitido por um corpo negro (corpo ideal que radia toda a energia que recebe) é proporcional à quarta potência da temperatura absoluta do corpo:

$$\dot{q}_r = \sigma T^4 \quad [\text{W/m}^2]$$

em que $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ [W/m}^2 \text{ K}^4\text{]}$ é a constante de Stefan-Boltzmann. Importante: T deve estar em kelvin.

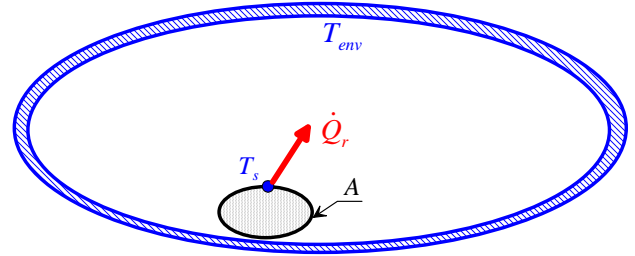
Para um tipo de corpo não ideal, designado por corpo cinzento, o valor do fluxo de calor trocado por radiação é reduzido por um coeficiente empírico, a emissividade ε :

$$\dot{q}_r = \varepsilon \sigma T^4 \text{ [W/m}^2\text{]} \quad \text{com } 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

O valor da emissividade é dado em Tabelas. Desta forma a taxa de calor trocado por radiação entre um corpo cinzento, cuja superfície A está à temperatura T_s , e um meio envolvente, muito maior, à temperatura T_{env} ,

é:

$$\dot{Q}_r = A \varepsilon \sigma (T_s^4 - T_{env}^4) \text{ [W]}$$



Em muitas situações a transferência de calor faz-se simultaneamente por convecção (livre) e radiação, sendo útil definir um coeficiente equivalente de radiação. Este é obtido da equação anterior, escrevendo:

$$\dot{q}_r = \underbrace{\left[\varepsilon \sigma (T_s^2 + T_{env}^2) (T_s + T_{env}) \right]}_{h_r} (T_s - T_{env}) \text{ [W/m}^2\text{]}$$

ou: $\dot{q}_r = h_r (T_s - T_{env})$

com: $h_r = \varepsilon \sigma (T_s^2 + T_{env}^2) (T_s + T_{env}) \approx 4 \varepsilon \sigma T_s^3 \text{ [W/m}^2 \text{ K]}.$

O fluxo de calor total, devido a convecção e radiação, será dado por:

$$\dot{q} = \dot{q}_c + \dot{q}_r = h_{tot} (T_s - T_{env}) \text{ [W/m}^2\text{]} \quad \text{com } h_{tot} = h_c + h_r \text{ [W/m}^2 \text{ K]}.$$

Resumo:

Tabela 3 – Características essenciais dos modos de transferência de calor

Modo de transferência	Fluxo de calor $\dot{q} = \dot{Q} / A \text{ [W/m}^2 \text{ K]}$	Mecanismo
Condução	$k(T_1 - T_2) / L$	Interacções microscópicas, molécula a molécula (difusão)
Convecção	$h(T_1 - T_2)$	Movimento relativo macroscópico de elementos de fluido
Radiação	$\sigma \varepsilon (T_1^4 - T_2^4)$	Propagação (no vazio, ou num meio) de ondas electromagnéticas (ou fotões)

Capítulo 1 – Introdução. Modos de Transferência de Calor

1.4 Exercícios:

- 1) Considerar o arrefecimento de 130 °C até 70 °C, durante 20 minutos, de uma esfera de bronze exposta a ar ambiente a 30 °C. A esfera tem 15 cm de diâmetro e as propriedades do material são $k = 111 \text{ W/m.K}$, $\rho = 8520 \text{ kg/m}^3$, e $c_p = 0.38 \text{ kJ/kg.K}$. Calcular: a) Calor transferido; b) Potência calorífica média; c) Fluxo de calor médio na superfície; d) Coeficiente convectivo inicial.
- 2) Transferência de calor em regime permanente entre 2 placas paralelas a 290 K e 150 K, separadas por 2 cm, e com emissividade igual a 1. Fluxo calorífico quando o espaço é constituído por: a) ar; b) vazio; c) isolamento de fibra de vidro; d) superisolamento com condutibilidade térmica 0.00015 W/m.K .
- 3) Um chip de computador dissipa uma potência eléctrica de 3 W para ar a 60 °C. A área superficial é 0.34 cm^2 . a) Calor transferido em 8 h (em kWh); b) Fluxo de calor na superfície.
- 4) Uma lâmpada incandescente esférica com 8 cm de diâmetro consome 150 W de potência eléctrica. O filamento cilíndrico tem 0.5 mm de diâmetro e comprimento 5 cm. a) Fluxo de calor na superfície do filamento; b) Fluxo de calor no bolbo esférico da lâmpada; c) Custo anual para um funcionamento de 8 h/dia e custo de electricidade de 16 c/kWh.
- 5) Arrefecimento de melancia (esfera 35 cm) num frigorífico, de 25 °C a 10 °C. A potência de arrefecimento medida é 200 kJ/h e as propriedades físicas da melancia são semelhantes às da água. a) Fluxo de calor na superfície da melancia; b) tempo necessário para o arrefecimento.
- 6) Uma placa com circuitos lógicos de 15x20 cm tem 120 chips adjacentes em que cada um consome 0.1 W de potência eléctrica. a) Calor dissipado em 10 h (kWh); b) Para uma temperatura máxima de 50 °C e temperatura ambiente 30 °C, qual o coeficiente convectivo de transmissão de calor.

Cap. 2 – Condução de Calor em Regime Permanente

Equação geral da condução de calor:

Lei de Fourier (local): $\vec{q} = -k \text{grad} T = -k \nabla T$ [W/m²] e $\dot{Q} = \vec{q} \cdot \vec{A} = \dot{q} A$ [W]

\vec{q} - vector fluxo de calor [W/m²], energia térmica transferida por unidade de área e unidade de tempo, numa determinada direcção;

\dot{q} - magnitude do fluxo de calor [W/m²], $\dot{q} = \|\vec{q}\| = \dot{Q} / A$;

\dot{Q} - taxa de transferência de calor (potência térmica) [W];

k - condutibilidade térmica [W/m K], uma propriedade física do material;

grad ou ∇ - operador gradiente [1/m], é um vector com componentes $(\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$;

T - temperatura [K] (como se trata de diferença de temperaturas, pode vir em °C);

\vec{A} - vector área, com componentes (A_x, A_y, A_z) [m²];

A - área de transferência de calor [m²], normal à direcção do fluxo de calor, $A = \|\vec{A}\|$.

Em geral, o objectivo de um problema de condução de calor será o de determinar a potência térmica transferida através duma geometria especificada (parede plana; invólucro cilíndrico; invólucro esférico, etc.), podendo para isso ser usada uma das seguintes expressões:

a) $\dot{Q} = AU\Delta T$ [W]

em que:

U - coeficiente global de transmissão de calor [W/m² K];

ΔT - diferença de temperaturas global ou equivalente [K];

b) $\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_t}$ [W]

em que:

R_t - resistência térmica global [K/W].

2.1 Placa plana

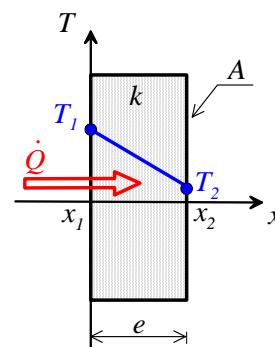
Caso unidimensional (1D, segundo x):

$$\dot{Q} = -kA \frac{dT}{dx} \quad [\text{W}]$$

e integrando, com \dot{Q} , k e A constantes,

$$\int_1^2 \dot{Q} dx = - \int_1^2 kA dT \Rightarrow \dot{Q} = -kA \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = kA \frac{(T_1 - T_2)}{\Delta x} \Rightarrow \dot{Q} = kA \frac{\Delta T}{e} \quad [\text{W}]$$

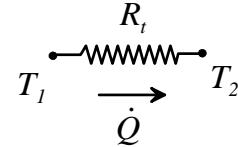
em que a espessura da placa é $e = \Delta x = x_2 - x_1$ e a diferença de temperaturas $\Delta T = T_1 - T_2$. Note-se que o fluxo de calor se faz da maior temperatura T_1 (face quente



da placa, em $x = x_1$) para a menor T_2 (face fria da placa, em $x = x_2$), como estipulado pela 2ª Lei da Termodinâmica.

A resistência térmica condutiva (R_t), por analogia com a fórmula da electricidade $V = RI$ (diferença de potencial igual à resistência eléctrica multiplicada pela intensidade da corrente), em que se fazem as equivalências: potencial $V \equiv \Delta T$ e corrente $I \equiv \dot{Q}$, vem:

$$\Delta T = \frac{e}{kA} \dot{Q} = R_t \dot{Q} \quad \text{com} \quad \boxed{R_t = \frac{e}{kA}} \quad [\text{K/W}]$$



Como no caso das resistências eléctricas, as resistências térmicas em série somam-se e, para as resistências em paralelo, somam-se os inversos:

$$R_{t,serie} = \sum_j R_{t,j} \quad \text{e} \quad 1/R_{t,paral.} = \sum_j (1/R_{t,j}).$$

2.2 Várias placas planas

Quantidade de calor através de cada placa, por unidade de tempo:

$$\dot{Q} = -kA \frac{dT}{dx} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = k_1 A \frac{T_1 - T_2}{e_1} = k_2 A \frac{T_2 - T_3}{e_2} = k_3 A \frac{T_3 - T_4}{e_3}$$

ou, somando sobre todas as placas

$$\dot{Q} \left(\frac{e_1}{k_1 A} + \frac{e_2}{k_2 A} + \frac{e_3}{k_3 A} \right) = (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) + (T_3 - T_4) = (T_1 - T_4) = \Delta T_{tot}$$

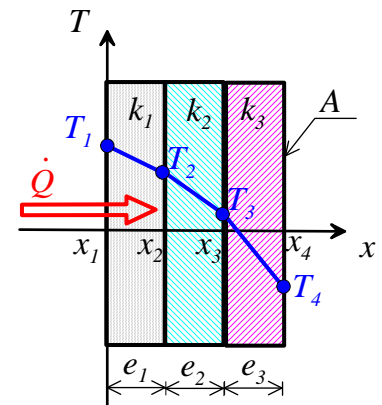
por fim

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T_{tot}}{\left(\frac{e_1}{k_1 A} + \frac{e_2}{k_2 A} + \frac{e_3}{k_3 A} \right)} = AU \Delta T_{tot} \quad [\text{W}]$$

com coeficiente global de transmissão por condução

$$\boxed{U = \frac{1}{\left[\frac{e_1}{k_1} + \frac{e_2}{k_2} + \frac{e_3}{k_3} \right]}} \quad \text{ou} \quad \boxed{U = \frac{1}{\sum_j \left[\frac{e_j}{k_j} \right]}} \quad [\text{W/m}^2 \text{ K}].$$

Nestas relações, e_j é a espessura da placa j e k_j a sua condutibilidade térmica.



Usando a noção de resistência térmica, com adição de resistências em série:

$$\boxed{R_{t,tot} = \sum_i \left(\frac{e_i}{k_i A} \right) = \frac{e_1}{k_1 A} + \frac{e_2}{k_2 A} + \frac{e_3}{k_3 A}} \quad [\text{K/W}]$$

e, de $V = RI$, vem

$$V = \left(\sum_j R_j \right) I \quad \Rightarrow \quad \Delta T_{tot} = \left(\sum_j R_{t,j} \right) \dot{Q} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = \frac{\Delta T_{tot}}{\sum_j R_{t,j}}$$

ou

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T_{tot}}{\sum_j \left(\frac{e_j}{Ak_j} \right)} \quad [\text{W}] \quad \text{com } \Delta T_{tot} \equiv (T_{int} - T_{ext}) = (T_1 - T_4) \quad [\text{K}]$$

pelo que o resultado final é o mesmo, mas sendo obtido de forma mais expedita.

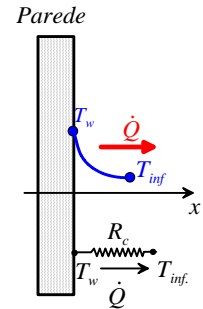
2.3 Placa plana com convecção

A equação de Newton para a taxa de calor por convecção, entre a superfície duma parede à temperatura T_w e um fluido com temperatura T_∞ (a infinito, longe da parede), é:

$$\dot{Q} = Ah(T_w - T_\infty) \quad [\text{W}]$$

em que h é o coeficiente convectivo. Desta forma, a resistência térmica convectiva (R_c) fica definida como:

$$\Delta T \equiv (T_w - T_\infty) = R_c \dot{Q} = \frac{1}{Ah} \dot{Q} \quad \Rightarrow \quad R_c = \frac{1}{Ah} \quad [\text{K/W}]$$

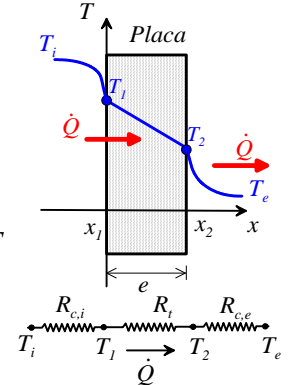


Considerando agora a placa plana na sua globalidade, a transferência de calor faz-se por convecção nas faces interior (índice i) e exterior (índice e) da placa, e por condução no seu interior. Somando essas duas resistências convectivas com a resistência condutiva através da placa, fica:

$$\Delta T_{tot} = T_i - T_e = \left(\sum_j R_{t,j} \right) \dot{Q} = (R_{c,i} + R_t + R_{c,e}) \dot{Q}$$

ou

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_e}{R_{c,i} + R_t + R_{c,e}} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{Ah_i} + \frac{e}{Ak} + \frac{1}{Ah_e}} = A \underbrace{\left(\frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_e}} \right)}_{=U} (T_i - T_e) = AU \Delta T$$



Portanto, a taxa de transferência de calor vem,

$$\dot{Q} = AU \Delta T \quad [\text{W}] \quad \text{com } \Delta T \equiv \Delta T_{tot} = T_i - T_e$$

e o coeficiente global de transferência de calor:

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_e}} \quad [\text{W/m}^2 \text{ K}]$$

2.4 Casca cilíndrica

O fluxo de calor (taxa de transferência de calor por unidade de área) segue a mesma fórmula da placa plana, dada acima, como estabelecido pela lei de Fourier para a condução de calor:

$$\dot{q} = -k \frac{dT}{dr}$$

em que r é a distância radial. Multiplicando pela área transversal cilíndrica de transferência de calor, obtém-se a quantidade total de calor transferido por unidade de tempo, a grandeza que se conserva:

$$\dot{Q} = A\dot{q} = 2\pi rL\dot{q} = -2\pi rLk \frac{dT}{dr}$$

Integrando entre a superfície interior e a superfície exterior da casca cilíndrica, pontos 1 e 2, com \dot{Q} e k constantes, vem:

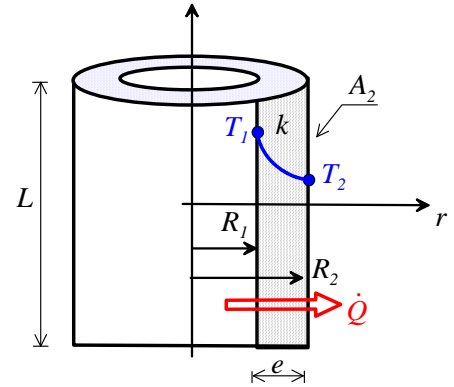
$$\int_1^2 \dot{Q} \frac{dr}{r} = -\int_1^2 2\pi Lk dT \Rightarrow \dot{Q} \int_1^2 \frac{dr}{r} = -2\pi Lk \int_1^2 dT$$

$$\Rightarrow \dot{Q} [\ln r]_1^2 = -2\pi Lk (T_2 - T_1)$$

$$\dot{Q} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) = 2\pi Lk (T_1 - T_2) \Rightarrow \dot{Q} = 2\pi Lk \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(R_2 / R_1)}$$

A resistência térmica fica assim definida como ($\Delta T = T_1 - T_2$):

$$\Delta T = R_{t,cil} \dot{Q} \quad \text{com} \quad R_{t,cil} = \frac{\ln(R_2 / R_1)}{2\pi Lk}$$



Nota: quando a espessura entre cascas, $e = R_2 - R_1$, é pequena ($e / R_1 \equiv \varepsilon \ll 1$), tem-se $R_2 / R_1 = 1 + e / R_1 = 1 + \varepsilon$ e como $\ln(1 + \varepsilon) \sim \varepsilon = e / R$, a resistência térmica para **cilindros com pequena curvatura** fica:

$$R_{t,cil} = \frac{\ln(R_2 / R_1)}{2\pi Lk} \cong \frac{e / R}{2\pi Lk} = \frac{e}{2\pi RLk} = \frac{e}{Ak}$$

idêntica à fórmula para placas planas, com área da superfície de transferência igual a $A = 2\pi RL$ (área de casca cilíndrica fina, $R = R_1 \cong R_2$).

2.5 Várias cascas cilíndricas com convecção

Procede-se por analogia com o caso semelhante da placa plana ou, de forma mais fácil, faz-se a soma das várias resistências térmicas em série. Considerando, para simplificar, duas cascas cilíndricas de material sólido:

$$\Delta T_{tot} = T_i - T_e = \left(\sum_j R_{t,j} \right) \dot{Q} = (R_{c,i} + R_{t,1} + R_{t,2} + R_{c,e}) \dot{Q}$$

ou

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_e}{R_{c,i} + R_{t,1} + R_{t,2} + R_{c,e}} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{A_i h_i} + \frac{\ln(R_2 / R_1)}{2\pi Lk_1} + \frac{\ln(R_3 / R_2)}{2\pi Lk_2} + \frac{1}{A_e h_e}}$$

com $A_i = 2\pi R_1 L$ e $A_e = 2\pi R_3 L$.

Nota: a casca 1 está entre os raios R_1 e R_2 e tem condutibilidade térmica k_1 ; a casca 2 está entre os raios R_2 e R_3 e tem condutibilidade k_2 ; os raios interior e exterior são $R_i = R_1$ e $R_e = R_3$.

A expressão anterior pode escrever-se como ($\Delta T \equiv \Delta T_{tot} = T_i - T_e$):

$$\dot{Q} = A_i U_i \Delta T = A_e U_e \Delta T = AU \Delta T$$

com

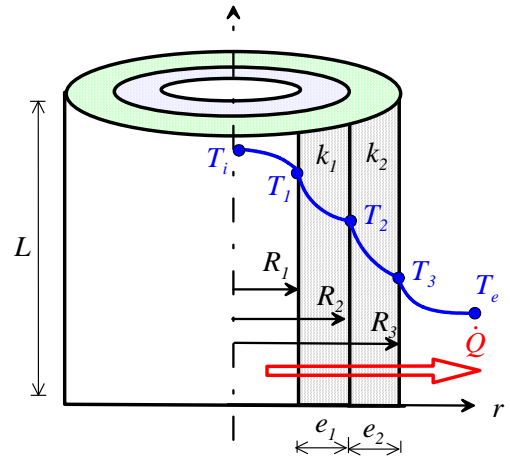
$$AU = \frac{1}{\left[\frac{1}{A_i h_i} + \frac{\ln(R_2 / R_1)}{2\pi L k_1} + \frac{\ln(R_3 / R_2)}{2\pi L k_2} + \frac{1}{A_e h_e} \right]}$$

e

$$U_i = \frac{1}{\left[\frac{1}{h_i} + \frac{R_1 \ln(R_2 / R_1)}{k_1} + \frac{R_1 \ln(R_3 / R_2)}{k_2} + \frac{R_1}{R_3 h_e} \right]}$$

ou

$$U_e = \frac{1}{\left[\frac{R_3}{R_1 h_i} + \frac{R_3 \ln(R_2 / R_1)}{k_1} + \frac{R_3 \ln(R_3 / R_2)}{k_2} + \frac{1}{h_e} \right]}$$



2.6 Casca esférica

O fluxo de calor segue a lei de Fourier:

$$\dot{q} = -k \frac{dT}{dr}$$

em que r é a distância radial das coordenadas esféricas. Multiplicando pela área da secção esférica de transferência de calor, obtém-se a taxa de transferência de calor (grandeza conservada):

$$\dot{Q} = A \dot{q} = 4\pi r^2 \dot{q} = -4\pi r^2 k \frac{dT}{dr}$$

Integrando entre 1 e 2, com \dot{Q} e k constantes

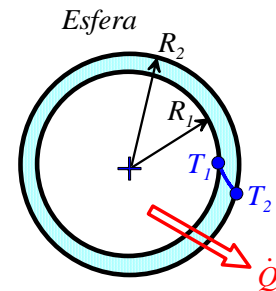
$$\begin{aligned} \int_1^2 \dot{Q} \frac{dr}{r^2} &= - \int_1^2 4\pi k dT \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = -4\pi k \int_1^2 dT \\ \Rightarrow \dot{Q} \left[-\frac{1}{r} \right]_1^2 &= -4\pi k (T_2 - T_1) \end{aligned}$$

ou

$$\dot{Q} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 4\pi k (T_1 - T_2) \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = 4\pi R_2 R_1 k \frac{(T_1 - T_2)}{(R_2 - R_1)}$$

A resistência térmica da esfera fica assim definida como ($\Delta T = T_1 - T_2$):

$$\Delta T = R_{t,esf} \dot{Q} \quad \text{com} \quad R_{t,esf} = \frac{(R_2 - R_1)}{4\pi R_1 R_2 k}$$



Nota: quando a espessura entre cascas, $e = R_2 - R_1$, é pequena, tem-se $e / R \ll 1$ com $R \approx R_1 \approx R_2$, ficando:

$$R_{t,esf} \cong \frac{e}{4\pi R^2 k} = \frac{e}{Ak}$$

expressão idêntica aquela para placas planas, em que a área da superfície esférica de transferência é $A = 4\pi R^2$ (área de casca esférica fina).

2.7 Várias cascas esféricas com convecção

Por analogia com o caso cilíndrico, tem-se:

$$\Delta T_{tot} = T_i - T_e = \left(\sum_j R_{t,j} \right) \dot{Q} = (R_{c,i} + R_{t,1} + R_{t,2} + R_{c,e}) \dot{Q}$$

ou

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_e}{R_{c,i} + R_{t,1} + R_{t,2} + R_{c,e}} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{A_i h_i} + \frac{(R_2 - R_1)}{4\pi R_1 R_2 k_1} + \frac{(R_3 - R_2)}{4\pi R_2 R_3 k_2} + \frac{1}{A_e h_e}}$$

com $A_i = 4\pi R_1^2$ e $A_e = 4\pi R_3^2$.

Nota: a casca 1 está entre os raios R_1 e R_2 e tem condutibilidade térmica k_1 ; a casca 2 está entre os raios R_2 e R_3 e tem condutibilidade k_2 ; os raios interior e exterior são $R_i = R_1$ e $R_e = R_3$.

A expressão anterior pode escrever-se como ($\Delta T_{tot} \equiv \Delta T = T_i - T_e$):

$$\dot{Q} = A_i U_i \Delta T = A_e U_e \Delta T = AU \Delta T$$

com

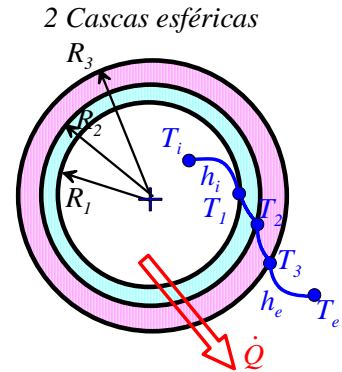
$$AU = \frac{1}{\left[\frac{1}{A_i h_i} + \frac{(R_2 - R_1)}{4\pi R_1 R_2 k_1} + \frac{(R_3 - R_2)}{4\pi R_2 R_3 k_2} + \frac{1}{A_e h_e} \right]}$$

e

$$U_i = \frac{1}{\left[\frac{1}{h_i} + \frac{R_1}{R_2} \frac{(R_2 - R_1)}{k_1} + \frac{R_1^2}{R_2 R_3} \frac{(R_3 - R_2)}{k_2} + \frac{R_1^2}{R_3^2} \frac{1}{h_e} \right]}$$

ou

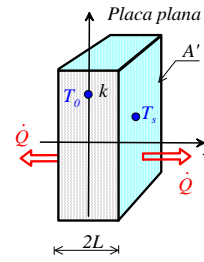
$$U_e = \frac{1}{\left[\frac{R_3^2}{R_1^2} \frac{1}{h_i} + \frac{R_3^2}{R_1 R_2} \frac{(R_2 - R_1)}{k_1} + \frac{R_3}{R_2} \frac{(R_3 - R_2)}{k_2} + \frac{1}{h_e} \right]}$$



2.8 Geração interna de calor

Inúmeras situações de transmissão de calor apresentam fontes internas de energia (eléctrica, nuclear, química), a qual se converte localmente em calor pelo habitual mecanismo da agitação molecular aleatória. A taxa de geração por unidade de volume é aqui designada \dot{q}_v [W/m³]. Como exemplo, a potência desenvolvida por uma corrente eléctrica de intensidade I a fluir através de um cabo cilíndrico com resistência eléctrica

R_e é $\dot{W}_e = R_e I^2$; por consequência, o valor da taxa de calor desenvolvido por efeito de Joule, por unidade de volume, vem $\dot{q}_v = R_e I^2 / \pi R^2 L$. Em problemas com geração interna de calor, a noção de resistência térmica das secções anteriores não se pode aplicar. Considerando que terá de haver conservação de energia, a gerada internamente no volume V deve ser igual ao calor convectado através da superfície de área A . Em geral tem-se:



aplicar energia se:

$$\dot{q}_v V = Ah(T_s - T_\infty) \Rightarrow T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}_v V}{Ah}$$

o que dá para a temperatura superficial de:

- Placa plana com espessura $2L$ -

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}_v L}{h}$$

$$(A = 2A', V = A' \times 2L)$$

- cilindro infinito, de raio R -

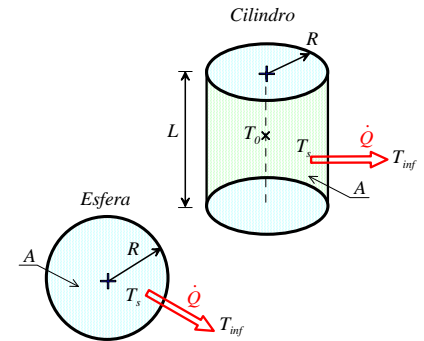
$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}_v R}{2h}$$

$$(A = 2\pi RL, V = \pi R^2 L)$$

- esfera, de raio R -

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}_v R}{3h}$$

$$(A = 4\pi R^2, V = \frac{4}{3}\pi R^3)$$



Devido a simetria, a temperatura máxima nestes casos ocorre no plano central, eixo, ou centro destas geometrias, e obtém-se através de um balanço de energia sobre um volume limitado pela coordenada genérica x (pode ser a distância radial, para cilindro e esfera),

$$-kA(x) \frac{dT}{dx} = \dot{q}_v V(x) \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}_v V(x)}{k A(x)}$$

Para cada caso, de geometria plana, cilíndrica ou esférica, integrando entre o ponto central (0) e a superfície (s), com a diferença interna de temperaturas definida como $\Delta T_{int} = T_0 - T_s$, obtém-se:

$$\text{- Placa plana, } \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}_v}{k} \frac{Ax}{A} \Rightarrow \int_0^s dT = -\frac{\dot{q}_v}{k} \int_0^s x dx \Rightarrow \Delta T_{int} = \frac{\dot{q}_v L^2}{2k}$$

$$\text{- Cilindro, } \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_v}{k} \frac{\pi r^2 L}{2\pi r L} \Rightarrow \int_0^s dT = -\frac{\dot{q}_v}{2k} \int_0^s r dr \Rightarrow \Delta T_{int} = \frac{\dot{q}_v R^2}{4k}$$

$$\text{- Esfera, } \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_v}{k} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} \Rightarrow \int_0^s dT = -\frac{\dot{q}_v}{3k} \int_0^s r dr \Rightarrow \Delta T_{int} = \frac{\dot{q}_v R^2}{6k}$$

Estes dois conjuntos de equações permitem obter a temperatura máxima para cada caso: o 1º grupo dá a temperatura à superfície T_s , e o 2º grupo dá a temperatura no “centro” $T_0 = T_s + \Delta T_{int}$.

Resumo:**Resistência térmica, $\Delta T = R_t \dot{Q}$**

Geometria	R_t [m ² /W]	Notação
Placa	$e / (kA)$ ($e = x_2 - x_1$)	$R_{t,placa}$
Cilindro	$\log(R_2 / R_1) / (2\pi Lk)$	$R_{t,cil}$
Esfera	$(R_2 - R_1) / (4\pi R_1 R_2 k)$	$R_{t,esf}$
Convecção	$1 / (hA)$	R_c

2.9 Exemplos

Exemplo 1 - Condução em geometria plana. Transmissão de calor em janela com vidro simples ou duplo. Calcular a taxa de transferência de calor através de uma janela de vidro ($k = 0.78$ W/(m K)), no inverno, quando o interior está a 20°C e o exterior a -10°C. A janela tem área 80x150 cm e os coeficientes de convecção no interior e no exterior são 10 e 40 W/(m² K), respectivamente. O vidro simples tem espessura 8 mm, enquanto no caso do vidro duplo cada lâmina de vidro tem 4 mm de espessura, com um espaço de ar de 10 mm (sem ventilação, $k_{ar} = 0.026$ W/(m K)). Obter ainda a temperatura interior do vidro. (do Cengel)

Usando a noção de resistências térmica em série, a taxa de transferência de calor do interior para o exterior (perda de calor através do vidro) é dada por $\dot{Q} = \Delta T / R_{t,tot}$, com $\Delta T = T_i - T_e = 20 - (-10) = 30$ °C, e resistência térmica total

$$R_{t,tot} = R_{c,i} + R_{t,vidro} + R_{c,e} = \frac{1}{Ah_i} + \frac{e_{vidro}}{Ak_{vidro}} + \frac{1}{Ah_e} = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{10} + \frac{0.008}{0.78} + \frac{1}{40} \right),$$

ou seja, a resistência da área unitária é

$$AR_{t,tot} = 0.10 + 0.0102 + 0.025 = 0.1352 \text{ K m}^2/\text{W}$$

no caso do vidro simples. Repare-se que a principal resistência (a que controla a transferência de calor) é a convectiva interior, com a convectiva exterior 4 vezes menor e a do próprio vidro cerca de 10 vezes inferior. Como a área da janela é $A = 0.80 \times 1.50 = 1.20$ m², a taxa de calor transferido pela janela de vidro simples é:

$$\dot{Q} = A \frac{\Delta T}{AR_{t,tot}} = 1.20 \times 30 / 0.1352 = 266.2 \text{ W}.$$

Um cálculo semelhante para a janela de vidro duplo, considerando que no espaço de ar o calor é transferido unicamente por condução (isto é, assume-se não existir convecção natural na camada de 10 mm de ar estagnado entre os vidros), fornece as seguintes resistências unitárias:

$$AR_{t,tot} = \frac{1}{h_i} + 2 \frac{e_{vidro}}{k_{vidro}} + \frac{e_{ar}}{k_{ar}} + \frac{1}{h_e} = \left(\frac{1}{10} + 2 \times \frac{0.004}{0.78} + \frac{0.010}{0.026} + \frac{1}{40} \right) = 0.10 + 0.01025 + 0.3846 + 0.025 = 0.5199 \text{ K m}^2/\text{W}$$

e o calor transferido vem

$$\dot{Q} = A \frac{\Delta T}{AR_{t,tot}} = 1.20 \times 30 / 0.5199 = 69.2 \text{ W}.$$

Repare-se que, neste caso, a maior resistência térmica é a do espaço de ar entre vidros, a qual permite uma redução da perda de calor de 74%. Os coeficientes globais de

transmissão de calor são iguais ao inverso das resistências térmicas unitárias, ou seja $U = 1.92 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ para o vidro duplo e $U = 7.40 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ para o vidro simples.

Se sala fosse aquecida por radiadores eléctricos, com custo unitário da electricidade de $Y_E = 0.22 \text{ Euros/kWh}$, o que se pouparia em dinheiro com a mudança do vidro simples para o vidro duplo, assumindo que o aquecedor funciona durante 10 h por dia em 4 meses de inverno, seria:

$$L = (\dot{Q}_{\text{simples}} - \dot{Q}_{\text{duplo}}) Y_E T_h = (266.2 - 69.2) 10^{-3} \times 1.20 \times 0.22 \times 10 \times 30 \times 4 = 52.0 \text{ Euros.}$$

Designa-se por L o lucro monetário e por T_h o tempo de funcionamento total em horas.

A temperatura da face interior vidro é um parâmetro com interesse para o conforto térmico, pois se for muito baixa irá provocar condensação local do vapor de água existente no ar interior. Pode ser obtida a partir das taxas de transferência de calor já calculadas, usando a resistência convectiva da camada interior de ar:

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_{wi}}{R_{c,i}} = \frac{T_i - T_{wi}}{1 / Ah_i} \Rightarrow T_{wi} = T_i - \dot{Q} / Ah_i$$

Para o vidro simples:

$$T_{wi} = 20 - 266.2 / (1.20 \times 10) = -2.2 \text{ }^\circ\text{C} \text{ (muito baixa)}$$

e para o duplo

$$T_{wi} = 20 - 69.2 / (1.20 \times 10) = 14.2 \text{ }^\circ\text{C}$$

Verifica-se que o vidro duplo apresenta uma temperatura na face interior bastante superior àquela do vidro simples, e que, muito provavelmente, estará acima da temperatura do ponto de orvalho no interior, evitando assim a condensação do vapor de água.

Exemplo 2 – Condução em geometria cilíndrica. Um tubo de aço ($k_{aço} = 45.2 \text{ W/(m K)}$) com diâmetro nominal de 2" ($D_i = 2.067''$; $e = 0.154''$; nota: 1" = 25.4 mm) transporta vapor de água a 121°C. O tubo é isolado com uma camada de 2" de revestimento de magnésio ($k_{mag.} = 0.069 \text{ W/(m K)}$) e uma outra camada exterior de 2" de cortiça ($k_{cortiça} = 0.052 \text{ W/(m K)}$). Calcular a perda de calor para o exterior quando a temperatura da parede externa é 32°C?

Da Secção 5 a fórmula para a taxa de transferência de calor através de 3 cascas cilíndrica, quando as temperaturas das paredes interior e exterior são especificadas, é:

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_{we}}{R_{t,tot}} = \frac{T_{wi} - T_{we}}{R_{t,aço} + R_{t,mag.} + R_{t,cortiça}} = \frac{2\pi L(T_{wi} - T_{we})}{\frac{\ln(R_2 / R_1)}{k_{aço}} + \frac{\ln(R_3 / R_2)}{k_{mag.}} + \frac{\ln(R_4 / R_3)}{k_{cortiça}}}$$

Assume-se que o coeficiente convectivo interior, na superfície de contacto entre o tubo de aço e o vapor, é elevado, de forma que a temperatura da parede interior do tubo fica igual à temperatura do vapor ($T_{wi} = T_i$). Os raios das várias cascas cilíndricas consecutivas são:

$$R_1 = 2'' \times 25.4 / 2 = 26.25 \text{ mm}$$

$$R_2 = R_1 + e_{aço} = 26.25 + 0.154 \times 25.4 = 26.25 + 3.91 = 30.16 \text{ mm}$$

$$R_3 = R_2 + e_{mag.} = 30.16 + 2 \times 25.4 = 80.96 \text{ mm}$$

$$R_4 = R_3 + e_{cortiça} = 80.96 + 50.8 = 131.76 \text{ mm.}$$

As resistências térmicas no denominador da equação anterior (resistências multiplicadas por 2π para um metro de tubo) são:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(R_2 / R_1)}{k_{aço}} + \frac{\ln(R_3 / R_2)}{k_{mag.}} + \frac{\ln(R_4 / R_3)}{k_{cortiça}} &= \\ &= \frac{1}{45.2} \ln\left(\frac{30.16}{26.25}\right) + \frac{1}{0.069} \ln\left(\frac{80.96}{30.16}\right) + \frac{1}{0.052} \ln\left(\frac{131.76}{80.96}\right) = \\ &= 0.00307 + 14.31 + 9.37 = 23.68 \text{ K m/W} \end{aligned}$$

Confirma-se que a resistência da parede de aço do tubo é desprezável face às resistências das duas camadas de isolamento. A taxa de transferência de calor para o exterior, por metro de tubo ($L = 1 \text{ m}$), é:

$$\dot{Q} = \frac{(T_{wi} - T_{we})}{R_{t,tot}} = \frac{2\pi L (T_{wi} - T_{we})}{2\pi L R_{t,tot}} = \frac{2\pi (121 - 32)}{23.68} = 23.6 \text{ W/m}$$

Exemplo 3 – Geração interna de calor. Uma resistência eléctrica de 2 kW é usada para ferver água a uma temperatura de 105 °C. A resistência é cilíndrica, com diâmetro 4 mm e comprimento 50 cm, sendo feita de metal com condutibilidade térmica 15 W/(m K). Calcular a temperatura no centro da resistência. (Cengel)

Assume-se que toda a potência eléctrica da resistência ($\dot{W} = 2 \text{ kW}$) é dissipada internamente, de forma uniforme, por efeito de Ohm. Assim, a taxa de geração de calor por unidade de volume é:

$$\dot{q}_v = \frac{\dot{W}}{V} = \frac{\dot{W}}{(\pi D^2 / 4) L} = \frac{2000}{(\pi 0.004^2 / 4) \times 0.5} = 3.183 \times 10^8 \text{ W/m}^3$$

Assume-se ainda que o coeficiente convectivo entre a superfície da resistência eléctrica e a água a ferver é muito elevado, o que implica que a temperatura da superfície é aproximadamente igual à da água $T_s = T_\infty = 105^\circ\text{C}$.

A fórmula deduzida na Secção 8, que dá a variação interna de temperatura num cilindro submetido a geração de calor,

$$\Delta T_{int} = \frac{\dot{q}_v R^2}{4k}$$

permite calcular imediatamente a temperatura central (máxima) da resistência:

$$T_0 = T_s + \frac{\dot{q}_v R^2}{4k} = 105 + \frac{3.183 \times 10^8 \times 0.002^2}{4 \times 15} = 126.2^\circ\text{C}.$$

Não se tratando de um valor muito elevado, considera-se que o metal poderá operar sem problemas de fusão, ou deterioração devido a temperaturas extremas, ou outras causas desse tipo.

Exemplo 4 – Condução em geometria esférica. Um depósito para armazenar gelo é constituído por uma esfera metálica (aço inox, $k = 15 \text{ W/(m K)}$), com 3 m de diâmetro e 2 cm de espessura. A temperatura do gelo é 0 °C e a temperatura do ar exterior é 22 °C. Os coeficientes de transmissão de calor são $h_i = 80 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$, no interior, e $h_e = 15.3 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ no exterior, englobando efeitos de radiação e convecção, respectivamente 5.3 e 10 W/(m² K). O calor latente de fusão do gelo é $h_{sf} = 333.7 \text{ kJ/kg}$ (poderia ser obtido

duma tabela de propriedades da água). Calcular a taxa de transferência de calor através da parede do depósito e a massa de gelo que funde diariamente.

A fórmula para a taxa de transferência de calor em coordenadas esféricas (Secção 6 e 7) é:

$$\dot{Q} = \frac{T_e - T_i}{R_{c,i} + R_{t,esf} + R_{c,e}} = \frac{T_e - T_i}{\frac{1}{A_i h_i} + \frac{(R_2 - R_1)}{4\pi R_1 R_2 k} + \frac{1}{A_e h_e}}$$

com $R_1 = 3/2 = 1.5 \text{ m}$ e $R_2 = R_1 + e = 1.5 + 0.02 = 1.52 \text{ m}$. As resistências térmicas são (espessura $e = R_2 - R_1$)

$$R_{t,tot} = R_{c,i} + R_{t,esf} + R_{c,e} = \frac{1}{4\pi R_1^2 h_i} + \frac{e}{4\pi R_1 R_2 k} + \frac{1}{4\pi R_2^2 h_e} \text{ K/W}$$

ou, de forma mais simples, fazendo aparecer resistências unitárias,

$$A_i R_{t,tot} = \frac{1}{h_i} + \frac{e}{(R_2 / R_1) k} + \frac{1}{(R_2 / R_1)^2 h_e} = \frac{1}{80} + \frac{0.02}{(1.52 / 1.5) \times 15} + \frac{1}{(1.52 / 1.5)^2 \times 15.3} \\ = 0.0125 + 0.001316 + 0.06365 = 0.07747 \text{ K m}^2/\text{W}.$$

A maior resistência é aquela devida à convecção e radiação exteriores, e a resistência da parede metálica é tão pequena que poderia ter sido desprezada. A potência transferida é obtida multiplicando a razão entre diferença de temperaturas e resistência total unitária pela área interior ($A_i = 4\pi R_1^2 = 28.274 \text{ m}^2$):

$$\dot{Q} = A_i \frac{T_e - T_i}{A_i R_{t,tot}} = 4\pi R_1^2 \frac{22 - 0}{0.07747} = 8030 \text{ W}$$

Note-se ainda que, neste caso, como a espessura da parede esférica é pequena comparada com o raio da esfera (2 cm e 150 cm), o cálculo poderia ser feito como se de uma parede plana de área A_i se tratasse, o que daria:

$$A_i R_{t,tot} = \frac{1}{h_i} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_e} = \frac{1}{80} + \frac{0.02}{15} + \frac{1}{15.3} = 0.07919 \text{ K m}^2/\text{W}$$

e

$$\dot{Q} = A_i \frac{T_e - T_i}{A_i R_{t,tot}} = 28.274 \times \frac{22 - 0}{0.07919} = 7855 \text{ W}$$

um erro de 2%.

O cálculo da massa de gelo derretido faz-se igualando a quantidade de calor necessária para derreter uma massa m (o calor latente de mudança de fase vezes essa massa), à taxa de calor transferido pela parede do reservatório \dot{Q} vezes o intervalo de tempo decorrido, Δt (neste caso, 1 dia):

$$Q = m h_{sf} = \dot{Q} \Delta t \quad \Rightarrow m = \frac{\dot{Q} \Delta t}{h_{sf}} = \frac{8030 \times (24 \times 60 \times 60)}{333.7 \times 10^3} = 2079 \text{ kg}.$$

Portanto, no decorrer de um dia derretem cerca de 2 toneladas de gelo. Note-se que a massa total de gelo dentro do reservatório é $m = \rho_s V = 916 \times \frac{4}{3} \pi 1.5^3 = 12\,958 \text{ kg}$, em que $\rho_s = 916 \text{ kg/m}^3$ é a massa volúmica do gelo; 16% dessa massa é derretida diariamente. Para reduzir esta quantidade seria necessário isolar a parte exterior do reservatório.

Exemplo 5 – Geração interna de calor. Calcular a capacidade de transporte de electricidade de um fio de cobre com diâmetro 1.02 mm, revestido uniformemente por uma camada de isolamento plástico cujo diâmetro exterior é 3.05 mm. O plástico tem condutibilidade térmica $k_{plastic} = 0.35 \text{ W/(m } ^\circ\text{C)}$ e a máxima temperatura a que pode estar submetido é $93 \text{ } ^\circ\text{C}$. O cobre tem condutibilidade térmica $k_{cobre} = 380 \text{ W/(m } ^\circ\text{C)}$ e condutividade eléctrica $k_{e,cobre} = 5.1 \times 10^5 \text{ Ohm}^{-1} \text{ cm}^{-1}$. A temperatura do ar exterior é 38°C e o coeficiente de convecção $h_e = 8.5 \text{ W/(m}^2 \text{ } ^\circ\text{C)}$. Além da corrente eléctrica máxima, calcular ainda a temperatura no centro do fio de cobre.

Trata-se de um problema de geração interna de calor em geometria cilíndrica, semelhante ao tratado na Secção 8, com a diferença de que, agora, o calor total gerado internamente deve ser transmitido para o exterior pelo mecanismo da condução de calor, através do isolamento de plástico e, só depois, por convecção. Ou seja, o balanço global é agora:

$$\dot{q}_v V_{cobre} = \frac{(T_{si} - T_\infty)}{R_{t,tot}} = \frac{(T_{si} - T_\infty)}{R_{t,plastic} + R_{c,e}} = \frac{2\pi L(T_{si} - T_\infty)}{\frac{\ln(R_2 / R_1)}{k_{plastic}} + \frac{1}{R_2 h_e}}$$

em que $V_{cobre} = \pi R_1^2 L$ é o volume do fio de cobre e T_{si} a temperatura superficial interior do isolamento (entre o fio de cobre e o plástico). Esta temperatura será a maior a que o plástico estará submetido e, portanto, deverá ser $T_{si} \leq T_{\max \text{ plast}} = 93^\circ\text{C}$. A taxa de geração interna de calor por efeito de Joule é igual à potência eléctrica produzida por uma corrente de intensidade I e diferença de potencial V , ou seja $P = VI = R_e I^2$, com a resistência eléctrica relacionada com a resistividade por $R_e = \rho_e L / A_{cobre}$ ($A_{cobre} = \pi R_1^2$, com $R_1 = 0.51 \text{ mm}$). Recorde-se ainda que a resistividade eléctrica é igual ao inverso da condutividade, $\rho_e = 1 / k_e$, com $k_e = 5.1 \times 10^5 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} = 5.1 \times 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Substituindo na expressão anterior, tem-se

$$R_e I^2 = \left(\frac{L}{k_e \pi R_1^2} \right) I^2 = \frac{2\pi L(T_{si} - T_\infty)}{\frac{\ln(R_2 / R_1)}{k_{plastic}} + \frac{1}{R_2 h_e}}$$

o que dá:

$$I^2 = \frac{2k_e \pi^2 R_1^2 (T_{si} - T_\infty)}{\left(\frac{\ln(R_2 / R_1)}{k_{plastic}} + \frac{1}{R_2 h_e} \right)}$$

O valor máximo admissível da corrente eléctrica ocorre quando $T_{si} = T_{\max \text{ plast}}$, e substituindo valores, com $R_2 = 1.525 \text{ mm}$, obtém-se:

$$I^2 = \frac{2 \times 5.1 \times 10^7 \times (\pi 0.00051)^2 (93 - 38)}{\frac{\ln(1.525 / 0.51)}{0.35} + \frac{1}{0.001525 \times 8.5}} = \frac{14\,401}{3.129 + 77.14} = 179.4 \text{ A}^2$$

ou seja,

$$I = \sqrt{179.4} = 13.4 \text{ A}$$

Se a corrente eléctrica for superior a 13.4 amperes, a temperatura na superfície interior do plástico será superior a 93°C e este poderá derreter. Repare-se que a maior resistência térmica é aquela devida à convecção exterior (77.1 K m/W); a camada de plástico age como isolamento eléctrico e não como isolamento térmico.

A temperatura no centro do fio de cobre pode ser obtida usando a expressão deduzida na Secção 8:

$$\Delta T_{int} = \frac{\dot{q}_v R^2}{4k}$$

que, aplicada ao presente caso, escreve-se

$$T_0 = T_{si} + \frac{\dot{q}_v R_1^2}{4k_{cobre}} \Rightarrow T_0 = 93 + \frac{5.27 \times 10^6 \times 0.00051^2}{4 \times 380} = 93.001 \text{ } ^\circ\text{C}$$

em que

$$\dot{q}_v = \frac{R_e I^2}{A_1 L} = \frac{(\rho_e L / A_1) I^2}{A_1 L} = \frac{I^2}{k_e A_1^2} = \frac{13.4^2}{5.1 \times 10^7 \times (\pi R_1^2)^2} = 5.27 \times 10^6 \text{ W/m}^3$$

Verifica-se que a temperatura praticamente não varia no seio do fio de cobre.

2.10 Anexo 1 – Material Avançado: Equações diferenciais da condução de calor

A conservação da energia num problema de condução de calor (sem convecção), em regime permanente (a temperatura não varia no tempo), escreve-se em geral como:

$$\text{div}(\vec{q}) = \dot{q}_v$$

em que o termo da divergência do vector fluxo de calor (membro da esquerda) representa o fluxo que sai através da superfície do volume de controlo, e o termo da direita é a geração interna de calor por unidade de volume (se existir alguma). O volume de controlo é neste caso diferencial (um volume muito pequeno no espaço, dV) e pode ter uma forma qualquer. Esta equação descreve claramente um princípio de conservação: a energia gerada internamente num volume qualquer, tem de sair através da fronteira que delimita esse volume, uma vez assumir-se regime permanente, ou estado estacionário, sem hipótese de acumulação de energia (o que implicaria aumento de temperatura ao longo do tempo). Introduzindo a lei de Fourier, que relaciona o fluxo de calor com o gradiente de temperatura, a equação fica:

$$0 = \text{div}(k \mathbf{grad} T) + \dot{q}_v \quad \text{ou} \quad \boxed{0 = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q}_v}$$

Quando a condutibilidade térmica é uniforme, esta equação simplifica-se para

$$\text{div}(\mathbf{grad} T) = -\dot{q}_v / k \quad \text{ou} \quad \boxed{\nabla \cdot (\nabla T) = -\dot{q}_v / k} \quad \text{ou} \quad \boxed{\Delta T = -\dot{q}_v / k}$$

designada por equação de Poisson (o laplaciano da temperatura é $\nabla \cdot \nabla T = \nabla^2 T \equiv \Delta T$).

Quando não existem fontes internas de calor, obtém-se a equação de Laplace:

$$\boxed{\nabla^2 T = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\Delta T = 0}$$

Nos sistemas de coordenadas mais usuais, a equação de Poisson para a condução de calor (k constante) escreve-se, de forma expandida para geometrias tridimensionais, como:

Coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$\boxed{k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \dot{q}_v = 0}$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z) (Nota: $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$):

$$\boxed{k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \dot{q}_v = 0}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) (Nota: $x = r \cos \theta \sin \phi$; $y = r \sin \theta \sin \phi$):

$$\boxed{k \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] + \dot{q}_v = 0}$$

Todos os resultados dados neste capítulo correspondem à solução de uma destas equações, sob forma simplificada unidimensional (1D), com condições de fronteira apropriadas (de temperatura dada na fronteira do domínio de solução: condições de Dirichlet; de fluxo de calor dado: condições de Neumann; ou de coeficiente convectivo h dado: condições mistas ou de Robin).

Capítulo 2 – Condução de Calor em Regime Permanente.

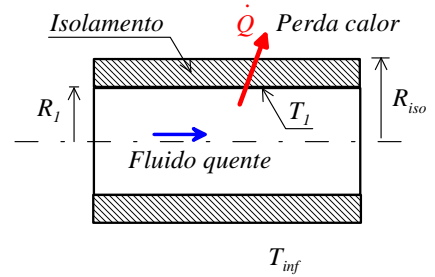
2.11 Exercícios:

- 1) Uma parede de tijolo ($k = 0.8 \text{ W/m.K}$) de 4 m x 6 m, com 30 cm de espessura, mantém uma temperatura de 14 °C na face interior e 6 °C na face exterior. Calcular a taxa de transferência de calor através da parede.
- 2) Uma janela de vidro ($k = 0.78 \text{ W/m.K}$), com dimensões 1.2 m x 2 m e espessura 6 mm, separa um ambiente interior a 24 °C, do exterior a -5 °C. Os coeficientes de transferência de calor superficial, englobando efeitos de convecção e radiação, são 10 e 25 W/m².K, respectivamente. Calcular a taxa de transferência de calor pela janela e a temperatura da face interior.
- 3) A janela do exercício anterior é substituída por outra de vidro duplo, com cada lâmina de vidro a apresentar uma espessura de 3 mm e o espaço entre vidros com ar estagnado ($k_{ar} = 0.026 \text{ W/m.K}$). Obter novamente a potência calorífica transferida, a temperatura do vidro na face interior, e comentar os resultados.
- 4) Uma casa é composta por 4 paredes de tijolo, com espessura 30 cm e condutibilidade térmica 0.69 W/m.K. A área da casa é 10 m x 15 m e a altura das paredes 3 m. A temperatura no interior da casa é mantida constante, a 20 °C, verificando-se experimentalmente que as faces interiores das paredes estão a 14 °C, enquanto a temperatura das faces exteriores varia durante o dia: 10 °C durante 10 h e 6 °C durante 14 h. Calcular: a) Taxa de transferência de calor perdido pelas paredes; b) Custo diário para o aquecimento eléctrico (preço unitário da electricidade $Y_E = 16 \text{ cent./kWh}$).
- 5) Uma resistência eléctrica de forma cilíndrica (comprimento 12 mm; diâmetro 3 mm) consome 0.15 W, dissipando calor para o ar envolvente a 40 °C, com coeficiente convectivo 9 W/m².K. a) Calor transferido durante um dia?; b) fluxo de calor na superfície da resistência; c) Temperatura superficial.
- 6) Um transistor de potência (0.2 W) é arrefecido com ar ambiente (30 °C, $h = 12 \text{ W/m}^2\text{.K}$). Assumindo que o fluxo de calor é uniforme na superfície do transistor (cilindro com 4 mm de comprimento e 5 mm de diâmetro), calcular: a) Calor transferido em 24 h (kWh); b) Fluxo de calor na superfície do transistor; c) Temperatura superficial.
- 7) Uma placa de circuitos electrónicos contém 100 chips de 70 mW colocados lado a lado na superfície superior, enquanto a superfície inferior está bem isolada. Dimensões da placa: 12 cm x 18 cm; temperatura do ar ambiente 25 °C; coeficiente convectivo 10 W/m².K. Calcular: a) Fluxo de calor na superfície da placa; b) Temperatura superficial dos chips; c) Resistência térmica entre os chips e o ambiente.
- 8) Calcular a temperatura na superfície da pele de pessoa nua em sala a 20 °C. A área superficial é 1.7 m², a temperatura interior do corpo 0.5 cm abaixo da pele é 37 °C e a condutibilidade térmica dos tecidos é 0.3 W/m.K. Assumir uma taxa metabólica em repouso de 150 W, dissipada por convecção e radiação para o ambiente. Calcular ainda o coeficiente superficial de transferência de calor.
- 9) Resistências generalizadas. Uma parede de 6 m x 4 m é feita de tijolos (secção 18x30 cm, $k = 0.72 \text{ W/m}^2\text{.K}$), revestidos por reboco (1.5 cm nas interfaces entre tijolos, em cima e em baixo; 2 cm nas faces laterais; $k = 0.22 \text{ W/m}^2\text{.K}$), e uma camada de 2 cm de isolamento de espuma ($k = 0.026 \text{ W/m}^2\text{.K}$). As temperaturas interior e exterior são 22 °C e -4 °C, e os respectivos coeficientes de transmissão

- de calor 10 e 20 W/m² °C. Calcular a taxa de transferência de calor através da parede.
- 10) Geometria cilíndrica. Uma conduta de secção circular (diâmetro 10 cm) e comprimento 50 m transporta vapor a 150 °C, temperatura praticamente igual à da face exterior da parede da conduta. Considerando que o ar ambiente exterior está a 15 °C e o respectivo coeficiente convectivo é 20 W/m² °C, calcular: a) Potência calorífica perdida pelas paredes da conduta; b) Custo anual dessa perda energética, tendo em conta que o rendimento da caldeira que produz o vapor é 75 % e o custo unitário do gás combustível que a alimenta é 52 c/termia (1 termia inglesa = 105 500 kJ); c) Espessura necessária de isolamento de fibra de vidro ($k = 0.035$ W/m °C) para diminuir a perda energética de 90 %.
 - 11) Geometria cilíndrica. Calcular o calor transferido por unidade de comprimento de conduta de aço ($k = 15.1$ W/m °C), com diâmetro interior 8 cm e diâmetro exterior 8.8 cm, revestida com 3 cm de isolamento de fibra de vidro ($k = 0.035$ W/m °C). A conduta transporta vapor de água a 300 °C e a temperatura ambiente exterior é 15 °C. Os coeficientes convectivos interior e exterior são 150 e 25 W/m² K. Verificar se a resistência térmica da parede da conduta pode ser desprezada.
 - 12) Geometria cilíndrica. Num condensador de ciclo de vapor, a água de arrefecimento (temperatura média 20 °C) circula em tubos de aço ($k = 386$ W/m °C) com 1 cm de diâmetro interior e 1.4 cm de diâmetro exterior. O coeficiente convectivo no interior dos tubos é 160 W/m² K. O vapor condensa a 35 °C na parte exterior dos tubos, com coeficiente convectivo 8000 W/m² K. O calor latente de condensação da água obtém-se das tabelas de vapor: $h_{fg} = 2419$ kJ/kg. Para um caudal de vapor de 200 kg/h, qual o comprimento necessário dos tubos?
 - 13) Geração de calor. Numa placa de aço ($k = 15.1$ W/m K) de grandes dimensões laterais e espessura 3 cm existe geração de calor à taxa de 5 milhões W/m³. Existe convecção para o ar ambiente a 30°C nos dois lados da placa, com coeficiente 600 W/m² K. Calcular as temperaturas máxima e mínima na placa, e dizer qual a sua localização.
 - 14) Geração de calor. Uma corrente eléctrica de 200 A circula num cabo de aço ($k = 19$ W/m °C) com 3 mm de diâmetro e 1 m de comprimento. A resistividade eléctrica do aço é $\rho_e = 70 \mu\Omega \cdot \text{cm}$. O cabo está submergido num líquido a 110 °C, com coeficiente convectivo 4 kW/m² K. Calcular a temperatura no centro do cabo.

Cap. 3 – Condução Estacionária: Raio Crítico de Isolamento

O propósito de se aplicar isolamento no exterior de um tubo é reduzir as perdas (ou ganhos) de calor entre o fluido que circula no interior e o meio exterior. No entanto, pode acontecer que o resultado seja precisamente o contrário deste objectivo: o isolamento pode fazer aumentar a taxa de transferência de calor. Isto acontece porque, apesar de o isolamento introduzir uma resistência térmica adicional, proporcional à espessura da camada de isolamento aplicada, a área exterior aumenta e, por consequência, aumenta também a contribuição da convecção de calor para o ambiente. Dependendo do peso relativo destas duas contribuições, condução na camada de isolamento e convecção na superfície exterior, o efeito final poderá ser o pretendido (\dot{Q} diminui) ou o contrário (\dot{Q} aumenta).



3.1 Caso de geometria cilíndrica

Considerando uma camada de isolamento sobre um tubo de comprimento L , raio R_1 e temperatura T_1 , a taxa de calor é (fluido interior a temperatura superior à do ambiente T_∞):

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_t + R_{c,e}} = \frac{T_1 - T_\infty}{\frac{\ln(R_{iso}/R_1)}{2\pi L k_{iso}} + \frac{1}{2\pi R_{iso} L h_e}} \quad [\text{W}]$$

Assume-se que todos os parâmetros nesta equação estão fixados, excepto o raio exterior do isolamento R_{iso} . A 1ª resistência térmica no denominador aumenta com R_{iso} , mas a 2ª resistência diminui com R_{iso} ; é o jogo entre estas duas tendências que fará com que o isolamento cumpra a sua função, ou não.

O raio crítico corresponde ao valor de R_{iso} a partir do qual a taxa de transferência de calor começa a diminuir, e é determinado fazendo a derivada de \dot{Q} relativamente a R_{iso} e igualando a zero:

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial R_{iso}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{Q} = \dot{Q}_{\max}$$

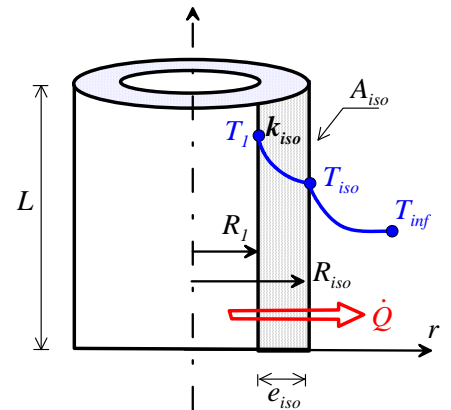
ou seja,

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial R_{iso}} = - \frac{T_1 - T_\infty}{\left(\frac{\ln(R_{iso}/R_1)}{2\pi L k_{iso}} + \frac{1}{2\pi R_{iso} L h_e} \right)^2} \left(\frac{1/R_{iso}}{2\pi L k_{iso}} - \frac{1/R_{iso}^2}{2\pi L h_e} \right) = 0$$

Fica

$$\left(\frac{1/R_{iso}}{2\pi L k_{iso}} - \frac{1/R_{iso}^2}{2\pi L h_e} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{k_{iso}} - \frac{1/R_{iso}}{h_e} \right) = 0$$

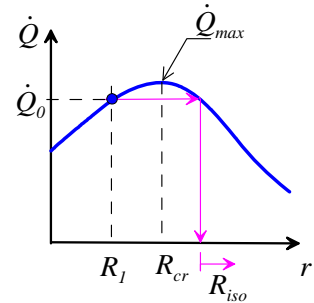
e finalmente, chamando R_{cr} a este valor de R_{iso} :



$$\Rightarrow R_{cr} = \frac{k_{iso}}{h_e} \quad [\text{m}]$$

Este resultado implica que:

- Se o raio do tubo R_l for inferior a R_{cr} , a aplicação de isolamento fará inicialmente aumentar \dot{Q} ;
- Só para $R_{iso} > R_{cr}$ se obtém o desejado: diminuir a taxa de calor transferido;
- No entanto, o calor perdido pode ainda ser, nessa altura, superior àquele que se perdia sem isolamento \dot{Q}_0 , ver esquema ao lado;
- Se R_l for superior a R_{cr} , a aplicação de isolamento terá imediatamente o efeito desejado – de fazer diminuir \dot{Q} ;
- O R_{cr} é relativamente pequeno (por exemplo, para isolamento de fibra de vidro, com $k = 0.043 \text{ W/(m K)}$, se o coeficiente de convecção exterior for $h = 8 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ (convecção natural), tem-se $R_{cr} = 0.0054 \text{ m}$, ou seja $D_{cr} = 10.8 \text{ mm}$). Por isso, muitas vezes este problema não se põe.



Nota: por vezes o interesse pode ser o de maximizar o calor perdido; por exemplo, num cabo eléctrico a camada de plástico exterior cumpre o papel de isolamento eléctrico, e não térmico, e o desempenho do fio condutor será melhorado quando este não aquecer em demasia. Nesta situação, convirá escolher uma espessura de isolamento eléctrico tal que $R_{iso} = R_{cr}$, de modo a que o calor dissipado para o exterior seja máximo.

3.2 Caso da geometria esférica

A taxa de calor transferido através de um isolamento sobre uma superfície esférica é dada por:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_\infty}{\frac{R_{iso} - R_l}{4\pi R_{iso} R_l k_{iso}} + \frac{1}{4\pi R_{iso}^2 h_e}} \quad [\text{W}]$$

Derivando em ordem a R_{iso} e igualando a zero, obtém-se

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial R_{iso}} = -\frac{T_1 - T_\infty}{\left(\frac{R_{iso} - R_l}{4\pi R_{iso} R_l k_{iso}} + \frac{1}{4\pi R_{iso}^2 h_e} \right)^2} \left(\frac{+R_l / R_{iso}^2}{4\pi R_l k_{iso}} - \frac{2}{4\pi R_{iso}^3 h_e} \right) = 0$$

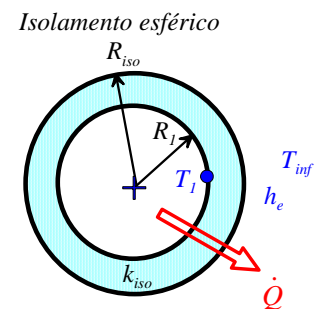
Ou seja,

$$\left(\frac{1}{4\pi k_{iso} R_{iso}^2} - \frac{2}{4\pi R_{iso}^3 h_e} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_{iso}^3}{R_{iso}^2} = \frac{2k_{iso}}{h_e}$$

Portanto, o raio crítico para esfera fica definido como:

$$R_{cr} = 2 \frac{k_{iso}}{h_e} \quad [\text{m}]$$

sendo duas vezes superior ao do cilindro.



3.3 Exemplo ilustrativo

Um tubo de meia polegada ($1'' = 25.4 \text{ mm}$) num sistema de refrigeração transporta fluido frigorigénio a -10°C , quando ao ambiente exterior está a 25°C . Para evitar que o fluido aqueça por transferência de calor do exterior, vai usar-se um isolamento de espuma de polietileno, com $k = 0.046 \text{ W/(m K)}$. O coeficiente de transferência de calor exterior só tem componente convectiva, sendo $h = 5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$, valor baixo por se tratar de convecção natural. Calcular o raio crítico e o ganho de calor sem isolamento e com isolamento de espessuras 4 mm e 10 mm. Calcular ainda o ganho de calor máximo.

O raio crítico vem da expressão dada acima:

$$R_{cr} = \frac{k_{iso}}{h_e} = \frac{0.046}{5} = 0.0092 \text{ m} = 9.2 \text{ mm}$$

Como este valor é superior ao raio do tubo, $R = D/2 = 0.5 \times 25.4/2 = 6.35 \text{ mm}$, a transferência de calor irá aumentar inicialmente, quando se começa a aplicar o isolamento. Sem isolamento, tem-se:

$$\dot{Q}_0 = \frac{T_\infty - T_1}{R_{c,e}} = \frac{T_\infty - T_1}{\frac{1}{2\pi RLh_e}} = 2\pi RLh_e (T_\infty - T_1) = 2\pi \times 0.00635 \times (25 - (-10)) = 6.98 \text{ W}$$

para um comprimento de $L = 1 \text{ m}$.

Para uma espessura de isolamento de 4 mm, o raio exterior do isolamento é $R_{iso} = R + e = 10.35 \text{ mm}$, e o calor transferido

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{T_\infty - T_1}{\frac{\ln(R_{iso}/R_1)}{2\pi Lk_{iso}} + \frac{1}{2\pi R_{iso}Lh_e}} = \frac{25 - (-10)}{\frac{\ln(10.35/6.35)}{2\pi \times 0.046} + \frac{1}{2\pi \times 0.01035 \times 5}} = \\ &= \frac{35}{1.69 + 3.08} = 7.34 \text{ W (por metro de tubo)}. \end{aligned}$$

Verifica-se que a situação com 4 mm de isolamento é pior do que sem isolamento algum, embora o valor de \dot{Q} seja já inferior ao valor máximo, que acontece para $R_{iso} = R_{cr} = 9.2 \text{ mm}$:

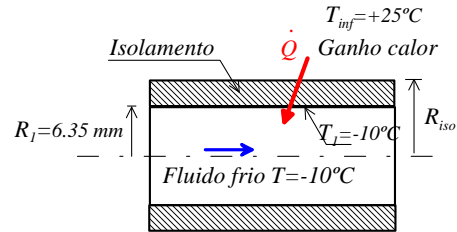
$$\dot{Q}_{\max} = \frac{35}{\frac{\ln(9.2/6.35)}{2\pi \times 0.046} + \frac{1}{2\pi \times 0.0092 \times 5}} = \frac{35}{1.28 + 3.46} = 7.38 \text{ W}.$$

Com $e = 10 \text{ mm}$, tem-se $R_{iso} = R + e = 16.35 \text{ mm}$, vem:

$$\dot{Q} = \frac{35}{\frac{\ln(16.35/6.35)}{2\pi \times 0.046} + \frac{1}{2\pi \times 0.01635 \times 5}} = \frac{35}{3.27 + 1.95} = 6.71 \text{ W}$$

e finalmente o isolamento é eficaz em reduzir a quantidade de calor “ganho” por unidade de tempo e por unidade de comprimento do tubo. Veja-se que para esta espessura, a resistência condutiva (3.27 K/W) é superior à resistência convectiva (1.95 K/W).

Este exemplo mostra que não basta ter $R_{iso} > R_{cr}$; um isolamento eficaz requer um valor de R_{iso} tal que \dot{Q} se torne inferior ao valor sem isolamento \dot{Q}_0 , como já tinha sido referido acima.



Capítulo 3 – Raio crítico em condução de calor estacionária

3.4 Exercícios:

- 1) Um fio eléctrico de 2 mm de diâmetro e 10 m de comprimento está envolvido por uma cobertura de plástico com 1 mm de espessura ($k = 0.15 \text{ W/(m.K)}$). A intensidade da corrente que percorre o fio é 10 A e a diferença de potencial 8 V. O meio exterior está a 30 °C e o coeficiente de transmissão de calor é 18 W/(m² K). Obter a temperatura na interface fio eléctrico/plástico e o raio crítico. Se a espessura do plástico dobrar, como deve variar a temperatura da interface?
- 2) Um cabo eléctrico de 2 mm apresenta uma temperatura de 45 °C estando envolvido num isolante plástico de 0.5 mm ($k_{\text{isol}} = 0.13 \text{ W/(m.K)}$). A temperatura do meio exterior é 10 °C e o coeficiente de transmissão 12 W/(m² K). Verificar se o revestimento de plástico faz aumentar ou diminuir a taxa de transferência de calor.
- 3) Repetir o exercício anterior quando há uma resistência de contacto igual a 0.0002 m² °C/W.
- 4) Considere uma esfera de 5 mm de diâmetro coberta por uma camada de 1 mm de isolamento plástico ($k_{\text{plast.}} = 0.13 \text{ W/(m.K)}$). A esfera está exposta ao ar, a 15 °C, com coeficiente convectivo 20 W/(m² K). O plástico faz aumentar ou diminuir o calor transferido?

Cap. 4 – Condução em Regime Permanente: Alhetas

Alhetas são extensões ou protuberâncias artificiais fixadas sobre as superfícies de transferência de calor para aumentar a sua área efectiva e, assim, incrementar a quantidade de calor transferida por unidade de tempo. Têm normalmente a forma de lamelas paralelas muito finas, ou de pinos cilíndricos ou cónicos esbeltos, que são dispostas segundo uma geometria bem definida sobre a superfície cuja taxa de calor se pretende aumentar. As alhetas são fabricadas de metal bom condutor de calor (alumínio, cobre, aço, etc.). As alhetas no radiador de um automóvel constituem um exemplo bem conhecido. A figura seguinte ilustra alhetas transversais, com forma de disco circular, colocadas sobre a parte exterior de um tubo cilíndrico.

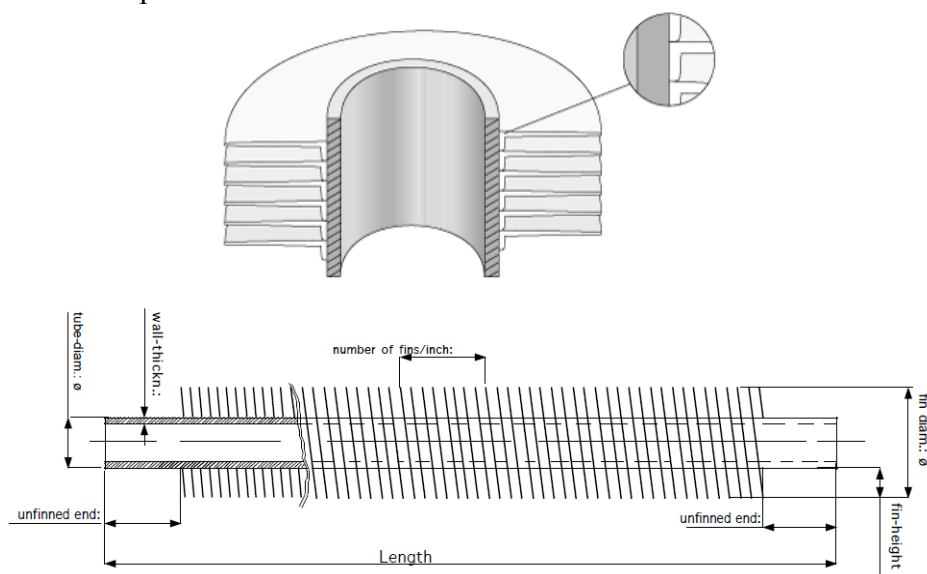


Figura 1- Ilustração de tubo com alhetas em forma de discos circulares (fonte: empresa aircofin).

4.1 Equação da alheta

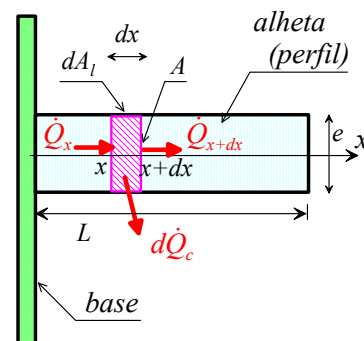
Na análise de transmissão de calor em alhetas assume-se que a condução ocorre ao longo da alheta, desprezando-se efeitos bidimensionais, e o arrefecimento é feito por convecção na superfície lateral, para o fluido circundante (temperatura T_∞), assumindo-se um coeficiente convectivo h constante. Desta forma, a temperatura na alheta $T(x)$ só depende da coordenada axial x , que varia entre $x=0$ na base da alheta, onde a temperatura é conhecida T_b , e $x=L$ na extremidade da alheta (L - comprimento da alheta).

O balanço de energia num volume elementar entre x e $x+dx$, com área da secção recta $A = A(x)$ (pode eventualmente variar ao longo da alheta) e área lateral dA_l , é:

*Calor que entra por condução em x = calor por condução que sai em $(x+dx)$
+ calor convectado para o fluido exterior pela área elementar lateral*

ou seja

$$\dot{Q}(x) = \dot{Q}(x+dx) + d\dot{Q}_c.$$



Expressando a variação diferencial do calor por condução como

$$\dot{Q}(x+dx) = \dot{Q}(x) + \frac{d\dot{Q}}{dx} dx$$

e usando a lei de Fourier para a condução ($\dot{Q}(x) = -A(x)k dT/dx$) e a lei de Newton para a convecção ($d\dot{Q}_c = (dA_l)h(T - T_\infty)$), obtém-se a **equação geral da alheta**:

$$-\frac{d\dot{Q}}{dx} dx = dA_l h(T - T_\infty) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) = \frac{dA_l}{dx} h(T - T_\infty)$$

Repare-se que esta equação diferencial tem o mesmo significado físico simples dado de início: o termo da esquerda é a diminuição do calor transferido no interior da alheta por condução; o termo da direita é o calor transferido para o exterior por convecção, a partir da superfície lateral da alheta. Como a energia se conserva, os dois termos têm de ser iguais.

Para simplificar a análise, vamos considerar alhetas com área transversal constante (por exemplo, lamela com perfil rectangular, ou pino cilíndrico). Nesta situação, $A = Cte$, e a área lateral pode escrever-se como $A_l = Px$, em que P é o perímetro (constante) da secção. Assim, $dA_l/dx = P$ e a equação geral simplifica-se para:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{Ph}{kA} (T - T_\infty) \quad \text{(Equação da alheta)}$$

ou

$$\frac{d^2 T'}{dx^2} = m^2 T' \quad \text{com } T' = T - T_\infty \text{ e } m^2 = \frac{Ph}{kA} \quad [1/m^2]$$

O **parâmetro adimensional** mL caracteriza o comportamento termodinâmico da alheta, como se irá verificar da análise feita no anexo:

$$mL = \sqrt{\frac{Ph}{kA}} L$$

Toma os seguintes valores, para duas formas de alheta típicas:

- **Placa rectangular** (largura W ; espessura e ; área secção $A = We$; perímetro $P = 2W$ desprezando as superfícies laterais nos fundos): $mL = L\sqrt{2h/(ke)}$
- **Pino cilíndrico** (diâmetro D ; $A = \pi D^2/4$; $P = \pi D$): $mL = L\sqrt{2\sqrt{2}h/(kD)}$.

Perfil de temperatura

A solução da equação diferencial da alheta, com duas condições de fronteira adequadas, permite obter a distribuição de temperatura ao longo da alheta $T(x)$. Serão fornecidos, adiante, os perfis de temperatura para dois tipos de condições de fronteira: alheta comprida e alheta isolada na extremidade. O fluxo de calor dissipado pela alheta e alguns parâmetros de desempenho usados para avaliar o efeito de alhetas são discutidos de seguida.

Fluxo de calor conduzido ao longo da alheta: quando a variação de temperatura é conhecida, a taxa de calor obtém-se facilmente por derivação, usando a lei de Fourier:

$$\dot{Q}(x) = -Ak \frac{dT}{dx}$$

A quantidade total de calor por unidade de tempo transferida para o exterior pela alheta é dada directamente por:

$$\dot{Q}_{tot} = \int_0^L Ph(T - T_{\infty})dx + A_e h_e (T_e - T_{\infty})$$

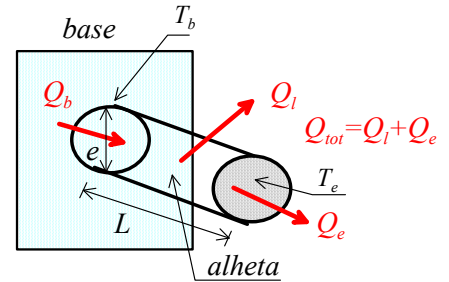
em que o ultimo termo representa o calor convectado pela extremidade da alheta, o qual é normalmente desprezado (A_e - área da extremidade; h_e - coeficiente convectivo na extremidade (poderá ser diferente de h); $T_e = T(L)$ - temperatura na extremidade da alheta). No entanto, \dot{Q}_{tot} pode ser mais facilmente obtida considerando a conservação global de energia:

Calor que entra pela base da alheta = calor convectado para o exterior

o que implica:

$$\dot{Q}_{tot} = \dot{Q}(0) = \dot{Q}_b$$

em que o calor que entra por condução na base se obtém directamente da expressão para o fluxo de calor fazendo $x = 0$.



4.2 Parâmetros de desempenho das alhetas

Eficiência (ou rendimento) – compara uma alheta real com uma correspondente ideal, em que a condução de calor seria muito rápida (toda a superfície da alheta estaria à temperatura da base):

$$\eta = \frac{\dot{Q}_{tot}}{\dot{Q}_{ideal}} = \frac{\dot{Q}_{tot}}{A_b h (T_b - T_{\infty})} \Rightarrow \boxed{\dot{Q}_{tot} = \eta A_b h (T_b - T_{\infty})}$$

Quando a eficiência é conhecida (pode ser obtida de gráficos ou tabelas, ver abaixo), esta expressão permite determinar imediatamente a potência térmica dissipada pela alheta (calor transferido por convecção para o fluido de arrefecimento circundante). A área total de transferência de calor da alheta é a soma da área lateral e a da extremidade: $A_t = A_l + A_e$. Quando a secção é constante, a área da extremidade é igual à área da base, $A_e = A_b = A$. Para alheta esbelta, a área da secção é muito menor do que a área lateral, o que se indica como: $A_t = A_l (1 + \varepsilon')$, em que $\varepsilon' = A / A_l$ é um parâmetro pequeno.

Eficácia – compara a alheta real com a correspondente situação sem alheta:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_{tot}}{\dot{Q}_{sem\ alheta}} = \frac{\dot{Q}_{tot}}{A_b h (T_b - T_{\infty})}$$

A eficácia é útil para aferir se a introdução de alhetas irá de facto aumentar a transferência de calor: isso só acontece se $\varepsilon > 1$. Quanto maior for a eficácia, melhor: a eficácia é o número de vezes que a potência calorífica transferida será aumentada como consequência da introdução da alheta. No entanto, o aumento de eficácia implica um aumento do comprimento da alheta; a partir de um determinado valor de comprimento, o aumento de eficácia torna-se muito pequeno e não se justifica economicamente (alheta maior, logo mais cara, mais pesada, menos compacta, etc.). De facto, verifica-se que a eficiência diminui com o aumento de L .

4.3 Alheta infinita

A temperatura ao longo duma alheta decai de forma aproximadamente exponencial. O caso mais simples consiste em considerar uma alheta suficientemente comprida (“alheta infinita”), para a qual $T \rightarrow T_\infty$, quando $L \rightarrow \infty$. Neste caso, a solução para a temperatura, escrita de forma adimensional, é dada por (ver Anexo):

$$\theta \equiv \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty} = e^{-mL(x/L)}$$

Repare-se que, quando $x = 0$ (base da alheta) se tem $e^0 = 1$, logo $T = T_b$ (temperatura imposta na base); e quando $x = L$, com $mL \gg 1$, $e^{-\infty} \rightarrow 0$ e $T = T_\infty$ (temperatura do fluido circundante, longe da superfície da alheta).

O fluxo de calor da alheta infinita é calculado como indicado acima:

$$\dot{Q}(x) = -Ak \frac{dT}{dx} = Akm(T_b - T_\infty)e^{-mx}$$

sendo o seu valor na base da alheta dado por

$$\dot{Q}_{tot} = \dot{Q}(0) = Akm(T_b - T_\infty)e^{-m0} \Rightarrow \dot{Q} = \sqrt{AkPh}(T_b - T_\infty).$$

A eficiência da alheta infinita é dada por:

$$\eta = \frac{\sqrt{AkPh}(T_b - T_\infty)}{PLh(T_b - T_\infty)} = \sqrt{\frac{Ak}{PL^2h}} = \frac{1}{mL} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{1}{mL}}$$

e a eficácia:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{AkPh}(T_b - T_\infty)}{Ah(T_b - T_\infty)} = \sqrt{\frac{kP}{Ah}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \sqrt{\frac{kP}{Ah}}}$$

Em particular, esta expressão da eficácia mostra que:

- O material da alheta deve ter uma condutibilidade térmica k elevada;
- A geometria da alheta deve garantir que a razão entre o perímetro e a área da secção seja a maior possível (alheta fina, no caso rectangular $e/2L \ll 1$; alheta esbelta, no caso de pino cilíndrico $D/4L \ll 1$);
- A convecção com o fluido exterior deve fazer-se com um coeficiente convectivo h reduzido, o que implica que as alhetas devem ser aplicadas na face em contacto com um fluido gasoso (ar, por exemplo), comparativamente a um líquido, e na situação de convecção natural, comparativamente à forçada.

4.4 Alheta com fluxo de calor nulo na extremidade

Uma situação mais realista, comparativamente à alheta infinita, é considerar como condição fronteira na extremidade da alheta $\dot{Q}(L) = 0$ (alheta isolada na ponta, o que se justifica quando $A/A_t \ll 1$, ou $e/2L \ll 1$). A solução para este caso (ver anexo) é:

$$\theta \equiv \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh(mL(1 - x/L))}{\cosh mL}$$

$$\dot{Q}_{tot} = \sqrt{AkPh}(T_b - T_\infty) \tanh mL$$

$$\boxed{\eta = \frac{\tanh mL}{mL}}$$

Estas são as principais fórmulas para o cálculo de alhetas. A 1ª permite por exemplo calcular a temperatura na extremidade da alheta, para $x = L$ vem $T_e = T_\infty + (T_b - T_\infty) / \cosh mL$. A 3ª dá a eficiência (poderia também ser obtida de um gráfico; mas a leitura desses gráficos introduz imprecisões) que permite depois calcular o calor total trocado a partir da definição de η , $\dot{Q}_{tot} = \eta A_t h (T_b - T_\infty)$, em vez de se usar a 2ª fórmula. Para $mL > 2.6$, estas fórmulas dão resultados iguais às da alheta infinita, com uma diferença inferior a 1%.

A condição de $\dot{Q} = 0$ na extremidade só é válida para alhetas esbeltas,

$$\varepsilon' \equiv A / A_t = e / 2L \leq 0.01$$

Para valores superiores deste parâmetro, a eficiência é dada por uma expressão geral mais complicada do que a dada acima (ver Anexo). Mesmo assim, estas fórmulas podem ser usadas com boa precisão desde que se corrija o comprimento da alheta, com o valor corrigido definido como: $L_c = L(1 + \varepsilon')$ com $\varepsilon' = A / A_t$, igual a $e / 2L$ (alheta com perfil rectangular) ou $R / 2L$ (pino cilíndrico).

4.5 Superfícies com alhetas

A análise e fórmulas anteriores dizem respeito a uma alheta individual. Normalmente, as superfícies a arrefecer necessitam de várias fileiras de alhetas dispostas paralelamente e, por isso, na análise da eficiência é preciso ter em conta as zonas inter-alhetas em que a transferência de calor se faz como se a superfície fosse lisa (sem alhetas). Designando a área global de transferência de calor por (usam-se índices em letra maiúscula para superfície com várias alhetas):

$$A_{TOT} = A_{ALH} + A_{INTER-ALH}$$

com o peso da área superficial de todas as alhetas relativamente à área total de transferência de calor dada por:

$$\beta = \frac{A_{ALH}}{A_{TOT}}.$$

Usualmente β tem um valor elevado, perto da unidade ($\beta \approx 0.8 - 0.95$). Note-se também que β pode ser determinado com base na geometria de uma única alheta e a superfície inter-alheta circundante, $\beta = A_t / (A_t + A_{inter-alh})$, uma vez que $A_{ALH} = N A_t$ com N igual ao número total de alhetas na superfície (ou $n =$ número de alhetas por metro de superfície, no caso de alhetas paralelas; quando o espaçamento entre alhetas é S , tem-se $n = 1 / (S + e)$ alhetas/metro). O calor global transferido pela superfície com alhetas pode também ser decomposto como:

$$\dot{Q}_{TOT} = \dot{Q}_{ALH} + \dot{Q}_{INTER-ALH} = (\eta A_{ALH} + A_{INTER-ALH}) h (T_b - T_\infty)$$

ou seja

$$\dot{Q}_{TOT} = \underbrace{(\eta\beta + (1 - \beta))}_{=\eta_{TOT}} A_{TOT} h (T_b - T_\infty)$$

Nesta expressão η é a eficiência de uma alheta individual, que foi definida nas secções anteriores e será dada nas figuras e tabelas seguintes, e

$$\eta_{TOT} = \eta\beta + (1 - \beta)$$

é a eficiência global da superfície com alhetas, ou eficiência ponderada com a área das zonas com alhetas e entre alhetas. A eficiência global η_{TOT} permite desde logo calcular a quantidade global de calor transferido por unidade de tempo,

$$\dot{Q}_{TOT} = \eta_{TOT} A_{TOT} h(T_b - T_\infty)$$

e a resistência térmica da camada de alhetas,

$$R_{t,ALH} = \frac{T_b - T_\infty}{\dot{Q}_{TOT}} = \frac{T_b - T_\infty}{\eta_{TOT} A_{TOT} h(T_b - T_\infty)} = \frac{1}{(\eta_{TOT} A_{TOT} h)} \Rightarrow R_{t,ALH} = \frac{1}{(\eta_{TOT} A_{TOT} h)}.$$

A **Tabela A** em anexo dá valores típicos de resistências térmicas de dispositivos de arrefecimento para equipamento electrónico (“heat sinks”).

4.6 Gráficos de eficiência de alhetas: η em função de mL (Nota: deve ser mL_c).

O calor transferido obtém-se de $\dot{Q}_{tot} = \eta A_t h(T_b - T_\infty)$.

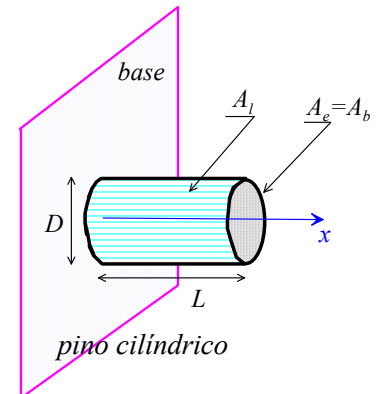
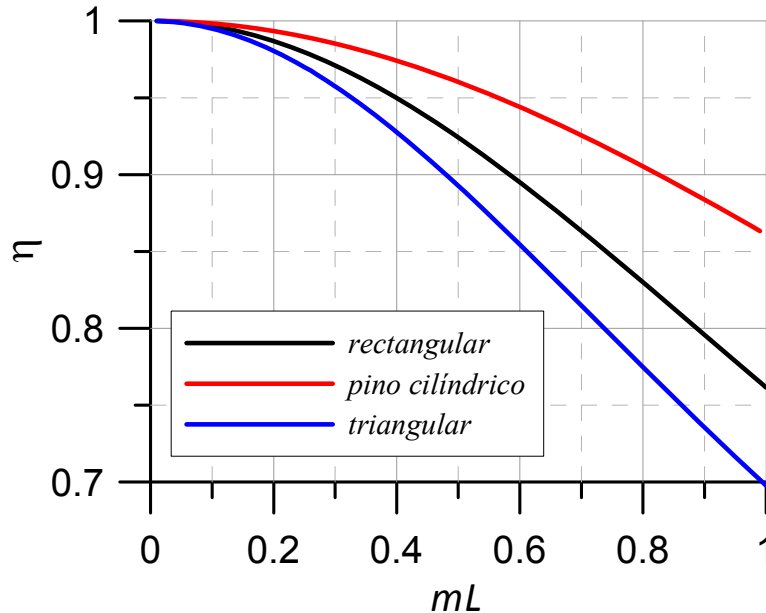
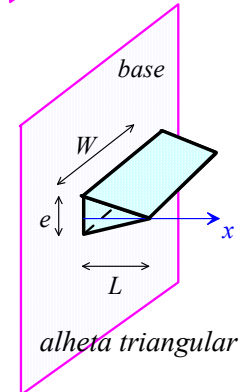
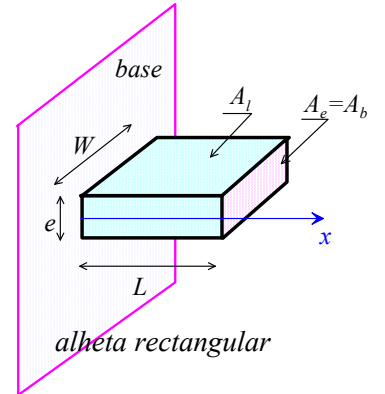
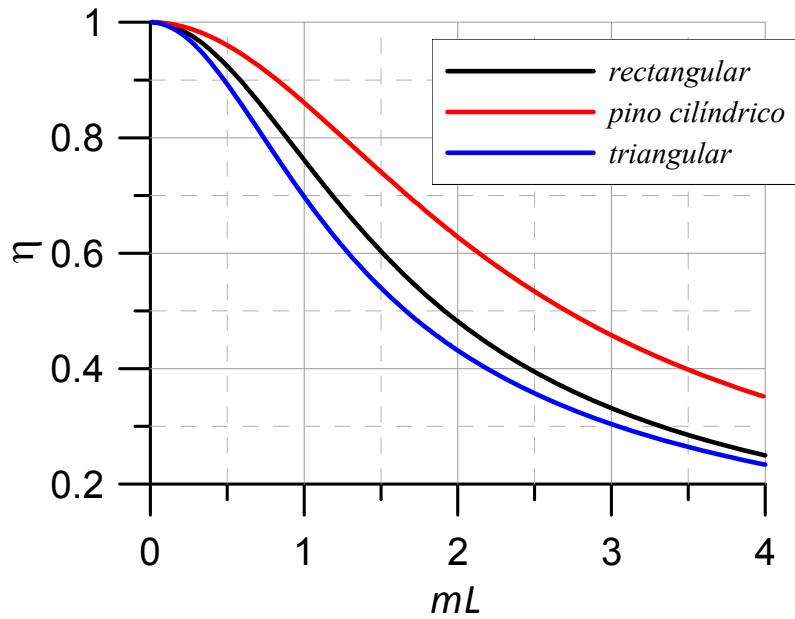


Figura 2a - Alhetas rectangulares ($mL = L_c \sqrt{2h/ke}$), cilíndricas ($mL = L_c \sqrt{2h/kD}$) e triangulares ($mL = L \sqrt{2h/ke}$), de base plana. Áreas de troca de calor: $A_t = 2WL_c$ (rectangular, $L_c = L + e/2$); $A_t = \pi DL_c$ (cilíndrico, $L_c = L + D/4$); $A_t = 2W\sqrt{(L^2 + e^2)/4}$ (triangular).

Nota: a área da superfície de troca de calor da alheta A_t , quando a secção é constante, corresponde à área lateral usada acima $A_t = PL$, com o comprimento da alheta corrigido ($L \rightarrow L_c$) de forma a contabilizar a troca de calor pela superfície da extremidade da alheta: secção rectangular $L_c = L + e/2$; secção circular $L_c = L + D/4$.

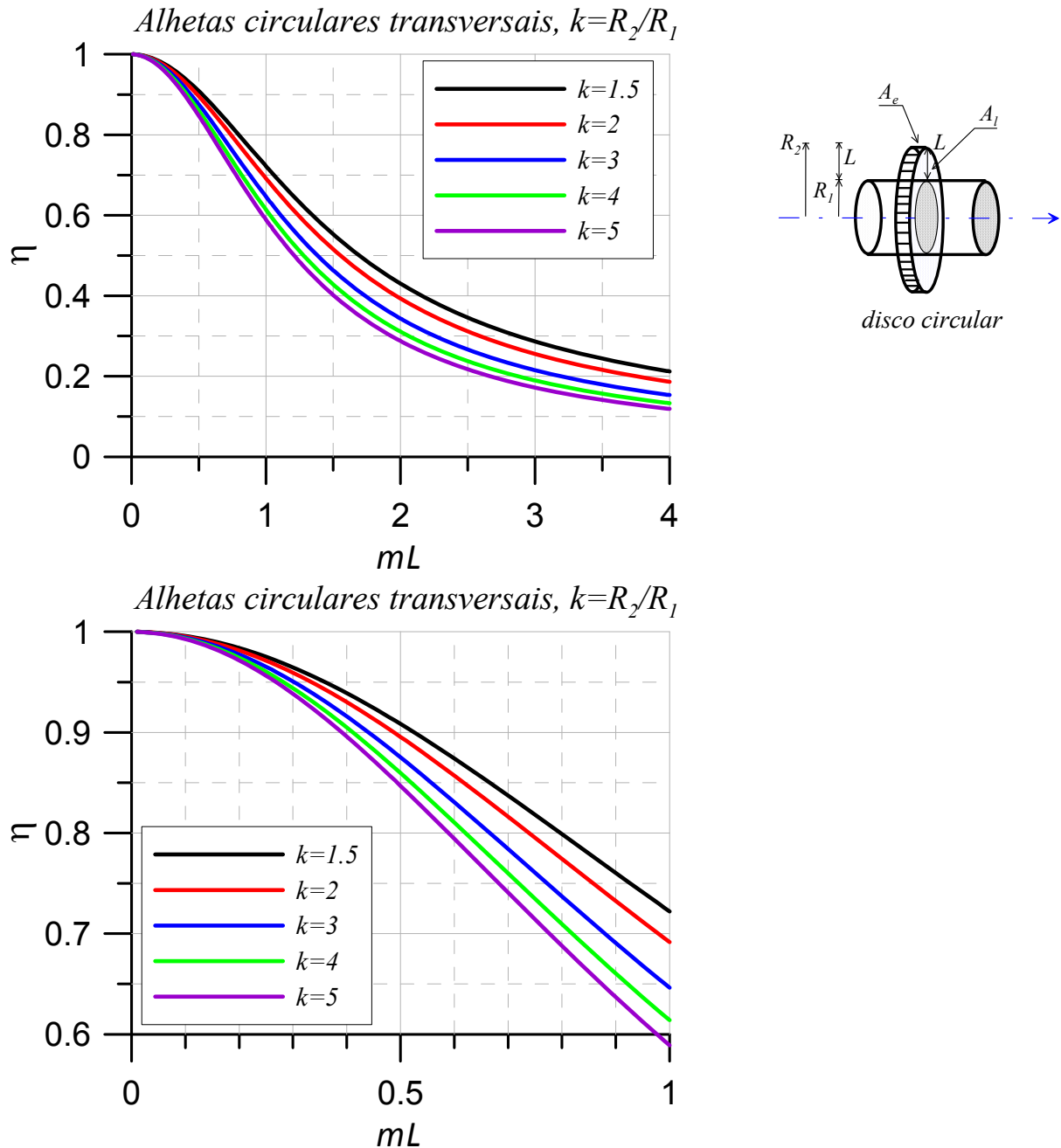


Figura 2b - Alhetas transversais em forma de disco, com base circular: de cima para baixo, $R_{2c} / R_1 = 1.5$, 2, 3, 4 e 5. Nota: $mL = L_c \sqrt{2h / ke}$, com $L_c = L + e/2$, $R_{2c} = R_2 + e/2$, $L = R_2 - R_1$.

4.7 Tabelas para alhetas

Em vez de se usarem os gráficos dados acima, pode ser mais fácil obter a eficiência das alhetas por interpolação nas tabelas dadas de seguida. Nestas tabelas usa-se

$mL = L\sqrt{2h/ke}$ para alhetas rectangulares e $mL = L\sqrt{2h/kR}$ para pinos cilíndricos, por forma a uma única tabela dar os resultados para os dois casos. Para alhetas triangulares $mL = L\sqrt{2h/ke}$, em que e é a espessura da base, e para alhetas circulares $mL = L\sqrt{2h/ke}$ com o comprimento dado por $L = R_2 - R_1$. Quando a alheta não é suficientemente longa, os comprimentos devem ser corrigidos, tal como nos gráficos anteriores: $L_c = L + e/2$ e $L_c = L + R/2$ (pino cilíndrico); $R_{2c} = R_2 + e/2$ e $L_c = R_{2c} - R_1$ (alheta circular).

Alhetas triangulares de base plana

mL	η	mL	η	mL	η	mL	η
0.1000	0.9950	1.1000	0.6618	2.1000	0.4147	3.1000	0.2953
0.2000	0.9805	1.2000	0.6281	2.2000	0.3988	3.2000	0.2869
0.3000	0.9575	1.3000	0.5965	2.3000	0.3840	3.3000	0.2790
0.4000	0.9277	1.4000	0.5672	2.4000	0.3702	3.4000	0.2715
0.5000	0.8928	1.5000	0.5400	2.5000	0.3574	3.5000	0.2644
0.6000	0.8546	1.6000	0.5148	2.6000	0.3453	3.6000	0.2577
0.7000	0.8149	1.7000	0.4916	2.7000	0.3340	3.7000	0.2513
0.8000	0.7749	1.8000	0.4701	2.8000	0.3234	3.8000	0.2452
0.9000	0.7356	1.9000	0.4502	2.9000	0.3135	3.9000	0.2394
1.0000	0.6978	2.0000	0.4318	3.0000	0.3041	4.0000	0.2338

Alhetas rectangulares ou pinos cilíndricos

mL	η	mL	η	mL	η	mL	η
0.1000	0.9967	1.1000	0.7277	2.1000	0.4621	3.1000	0.3213
0.2000	0.9869	1.2000	0.6947	2.2000	0.4435	3.2000	0.3115
0.3000	0.9710	1.3000	0.6629	2.3000	0.4261	3.3000	0.3022
0.4000	0.9499	1.4000	0.6324	2.4000	0.4099	3.4000	0.2935
0.5000	0.9242	1.5000	0.6034	2.5000	0.3946	3.5000	0.2852
0.6000	0.8951	1.6000	0.5760	2.6000	0.3804	3.6000	0.2774
0.7000	0.8634	1.7000	0.5502	2.7000	0.3670	3.7000	0.2699
0.8000	0.8300	1.8000	0.5260	2.8000	0.3545	3.8000	0.2629
0.9000	0.7959	1.9000	0.5033	2.9000	0.3427	3.9000	0.2562
1.0000	0.7616	2.0000	0.4820	3.0000	0.3317	4.0000	0.2498

Alhetas circulares, $R_2/R_1=1.5$

mL	η	mL	η	mL	η	mL	η
0.100	0.9959	1.100	0.6849	2.100	0.4107	3.100	0.2770
0.200	0.9839	1.200	0.6492	2.200	0.3926	3.200	0.2679
0.300	0.9647	1.300	0.6152	2.300	0.3758	3.300	0.2594
0.400	0.9391	1.400	0.5830	2.400	0.3602	3.400	0.2515
0.500	0.9085	1.500	0.5529	2.500	0.3457	3.500	0.2439
0.600	0.8741	1.600	0.5247	2.600	0.3322	3.600	0.2368
0.700	0.8372	1.700	0.4984	2.700	0.3196	3.700	0.2301
0.800	0.7990	1.800	0.4740	2.800	0.3078	3.800	0.2237
0.900	0.7604	1.900	0.4513	2.900	0.2969	3.900	0.2177
1.000	0.7221	2.000	0.4302	3.000	0.2866	4.000	0.2120

Alhetas circulares, $R_2/R_1=2.0$

mL	η	mL	η	mL	η	mL	η
0.100	0.9953	1.100	0.6521	2.100	0.3743	3.100	0.2465
0.200	0.9815	1.200	0.6146	2.200	0.3567	3.200	0.2381
0.300	0.9594	1.300	0.5793	2.300	0.3404	3.300	0.2301
0.400	0.9302	1.400	0.5463	2.400	0.3254	3.400	0.2227
0.500	0.8956	1.500	0.5156	2.500	0.3115	3.500	0.2157
0.600	0.8571	1.600	0.4871	2.600	0.2986	3.600	0.2091
0.700	0.8163	1.700	0.4607	2.700	0.2867	3.700	0.2029
0.800	0.7743	1.800	0.4364	2.800	0.2756	3.800	0.1971
0.900	0.7325	1.900	0.4140	2.900	0.2652	3.900	0.1916
1.000	0.6915	2.000	0.3933	3.000	0.2555	4.000	0.1863

Alhetas circulares, $R_2/R_1=3.0$

mL	η	mL	η	mL	η	mL	η
0.100	0.9943	1.100	0.6043	2.100	0.3253	3.100	0.2070
0.200	0.9775	1.200	0.5649	2.200	0.3087	3.200	0.1994
0.300	0.9508	1.300	0.5283	2.300	0.2934	3.300	0.1923
0.400	0.9161	1.400	0.4945	2.400	0.2793	3.400	0.1856
0.500	0.8753	1.500	0.4634	2.500	0.2664	3.500	0.1794
0.600	0.8307	1.600	0.4349	2.600	0.2545	3.600	0.1735
0.700	0.7840	1.700	0.4089	2.700	0.2435	3.700	0.1681
0.800	0.7370	1.800	0.3851	2.800	0.2333	3.800	0.1629
0.900	0.6908	1.900	0.3634	2.900	0.2239	3.900	0.1580
1.000	0.6464	2.000	0.3435	3.000	0.2151	4.000	0.1534

Alhetas circulares, $R_2/R_1=4.0$

mL	η	mL	η	mL	η	mL	η
0.100	0.9934	1.100	0.5704	2.100	0.2935	3.100	0.1821
0.200	0.9743	1.200	0.5300	2.200	0.2776	3.200	0.1751
0.300	0.9441	1.300	0.4929	2.300	0.2630	3.300	0.1685
0.400	0.9050	1.400	0.4589	2.400	0.2498	3.400	0.1624
0.500	0.8597	1.500	0.4280	2.500	0.2376	3.500	0.1567
0.600	0.8106	1.600	0.3999	2.600	0.2264	3.600	0.1514
0.700	0.7599	1.700	0.3743	2.700	0.2161	3.700	0.1464
0.800	0.7094	1.800	0.3511	2.800	0.2066	3.800	0.1416
0.900	0.6605	1.900	0.3301	2.900	0.1978	3.900	0.1372
1.000	0.6140	2.000	0.3109	3.000	0.1897	4.000	0.1330

Alhetas circulares, $R_2/R_1=5.0$

mL	η	mL	η	mL	η	mL	η
0.100	0.9927	1.100	0.5446	2.100	0.2708	3.100	0.1649
0.200	0.9716	1.200	0.5038	2.200	0.2555	3.200	0.1583
0.300	0.9385	1.300	0.4665	2.300	0.2416	3.300	0.1521
0.400	0.8960	1.400	0.4326	2.400	0.2289	3.400	0.1464
0.500	0.8470	1.500	0.4020	2.500	0.2173	3.500	0.1411
0.600	0.7944	1.600	0.3742	2.600	0.2067	3.600	0.1361
0.700	0.7407	1.700	0.3492	2.700	0.1969	3.700	0.1314
0.800	0.6878	1.800	0.3266	2.800	0.1879	3.800	0.1271
0.900	0.6370	1.900	0.3061	2.900	0.1796	3.900	0.1229
1.000	0.5891	2.000	0.2876	3.000	0.1720	4.000	0.1191

4.8 Exemplos de ilustração

Exemplo 1- Alheta rectangular de alumínio ($k = 200 \text{ W/(m K)}$), com espessura $e = 3 \text{ mm}$ e comprimento $L = 7.5 \text{ cm}$, colocada numa parede plana aquecida à temperatura $T_b = 300^\circ\text{C}$. O fluido de arrefecimento circundante está a $T_\infty = 50^\circ\text{C}$ e o coeficiente convectivo é $h = 10 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$. Calcular o calor transferido pela alheta \dot{Q} , por unidade de tempo e unidade de largura da alheta.

O parâmetro adimensional mL pode ser calculado com base no comprimento da alheta $L = 0.075 \text{ m}$, ou no comprimento corrigido $L_c = L + e/2 = 0.075 + 0.0003/2 = 0.0765 \text{ m}$:

$$m = \sqrt{\frac{Ph}{kA}} = \sqrt{\frac{2h}{ke}} = \sqrt{\frac{2 \times 10}{200 \times 0.003}} = 5.774 \text{ 1/m}$$

$$\Rightarrow mL = 5.774 \times 0.075 = 0.4330 \quad \text{e} \quad mL_c = 5.774 \times 0.0765 = 0.4417.$$

Para alheta com extremidade isolada, a eficiência é:

$$\eta = \frac{\tanh mL}{mL} = \frac{\tanh 0.4330}{0.4330} = \frac{0.4078}{0.4330} = 0.9418$$

logo o calor total transferido vem

$$\dot{Q}_{tot} = \eta \dot{Q}_{ideal} = 0.9418 \times 375 = 353.2 \text{ W/m}$$

em que (por metro de largura da alheta)

$$\dot{Q}_{ideal} = A_l h (T_b - T_\infty) = 2Lh(T_b - T_\infty) = 2 \times 0.075 \times 10 \times (300 - 50) = 375 \text{ W/m.}$$

Nota: interpolação na Tabela daria $\eta = 0.9419$ (uma diferença muito pequena).

Se basearmos agora o cálculo no comprimento corrigido, para compensar a área da extremidade, o rendimento fica:

$$\eta = \frac{\tanh mL_c}{mL_c} = \frac{\tanh 0.4417}{0.4417} = \frac{0.4150}{0.4417} = 0.9397 \text{ (Nota: da Tabela } \eta = 0.9392 \text{)}$$

A área de troca de calor é agora :

$$A_t = A_l + A_e = 2WL + We = 2WL(1 + e/2L) = 2WL_c$$

em que W é largura da alheta, aqui considerada como 1 m; fica assim justificada a definição de L_c . O calor máximo (ideal) transferido é calculado com base nesta área total:

$$\dot{Q}_{ideal} = A_t h (T_b - T_\infty) = 2L_c h (T_b - T_\infty) = 2 \times 0.0765 \times 10 \times (300 - 50) = 382.5 \text{ W/m.}$$

e portanto o calor efectivamente transferido vem

$$\dot{Q}_{tot} = \eta \dot{Q}_{ideal} = 0.9397 \times 382.5 = 359.4 \text{ W/m.}$$

Repare-se que a diferença relativa das eficiências obtidas pelos dois métodos é só de 0.2%, mas a diferença dos valores da potência calorífica aumenta para 1.7%. Este erro resulta sobretudo da diferença entre a área lateral e a área total da alheta, ou seja da relação:

$$\varepsilon' = A / A_l = e / 2L = 0.02 = 2 \%$$

que aparece na definição de $L_c = L(1 + e/2L) = L(1 + \varepsilon')$. Portanto, para que as fórmulas válidas para alheta com extremidade isolada dêem o calor transferido com precisão inferior a 1% deve ter-se $\varepsilon' \leq 0.01$, ou seja uma relação espessura/comprimento $e/L \leq 0.02$.

Nota: a utilização da Figura 1ª, para $mL_c = 0.44$, permite ler, aproximadamente, $\eta = 0.93$ - valor próximo do aqui utilizado. No entanto, é sempre melhor utilizar fórmulas, quando estas estão disponíveis.

Exemplo 2 – Um tubo de diâmetro exterior $d = 3$ cm transporta vapor de água a 120 °C quando a temperatura exterior é 25 °C. Para fazer aumentar a troca de calor, foram colocadas transversalmente, sobre a superfície exterior do tubo, alhetas circulares de alumínio ($k = 180 \text{ W/(m K)}$), com diâmetro $D = 6$ cm, espessura $e = 2$ mm e separação entre alhetas de $S = 3$ mm. O coeficiente convectivo exterior é $h = 60 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ e a resistência térmica devida à espessura do tubo pode ser desprezada. Calcular a potência calorífica trocada, por metro de comprimento de tubo, e a eficácia duma alheta e a eficácia global.

O número de alhetas por metro de comprimento de tubo é:

$$n = \frac{1}{e + S} = \frac{1}{0.002 + 0.003} = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} = 200 \text{ alhetas/metro.}$$

O raio interior das alhetas é $R_1 = d / 2 = 3 / 2 = 1.5 \text{ cm}$, o raio exterior $R_2 = D / 2 = 6 / 2 = 3 \text{ cm}$ e o comprimento $L = R_2 - R_1 = 1.5 \text{ cm}$. A área de transferência de calor de uma alheta, contabilizando a extremidade, é:

$$A_t = A_i + A_e = 2\pi(R_2^2 - R_1^2) + 2\pi R_2 e = 4.24 \times 10^{-3} + 3.77 \times 10^{-4} = 4.618 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

e os parâmetros usados na Figura 2b são:

$$\frac{R_{2c}}{R_1} = \frac{R_2 + \frac{1}{2}e}{R_1} = \frac{3 + 0.2 / 2}{1.5} = 2.07$$

e

$$mL \equiv mL_c = L_c \sqrt{\frac{2h}{ke}} = 0.016 \sqrt{\frac{2 \times 60}{180 \times 0.002}} = 0.292$$

em que o comprimento corrigido da alheta é calculado pela fórmula usual:

$$L_c = L + \frac{1}{2}e = 1.5 + 0.2 / 2 = 1.6 \text{ cm}.$$

Da Figura 2b lê-se o valor do rendimento de uma alheta única com $R_{2c} / R_1 = 2.07$ e $\xi = 0.206$ (como sempre a leitura está acompanhada de alguma imprecisão):

$$\eta \approx 0.95$$

(Das Tabelas, com $mL_c = 0.292$ e $R_{2c} / R_1 = 2.07$, obtém-se por interpolação: $\eta = 0.9606$; uma diferença de 1.1%)

A potência calorífica transferida por uma alheta é:

$$\dot{Q}_{tot} = \eta A_t h(T_b - T_\infty) = 0.95 \times 4.62 \times 10^{-3} \times 60 \times (120 - 25) = 25.01 \text{ W}$$

Como se têm 200 alhetas por metro de tubo, a taxa de calor global trocado por estas alhetas é:

$$\dot{Q}_{ALH} = n \dot{Q}_{tot} = 200 \times 25 = 5001.4 \text{ W/m}.$$

A taxa de calor global trocado pela zona entre alhetas é:

$$\dot{Q}_{INTER-ALH} = A_{INTER-ALH} h(T_b - T_\infty) = 0.05655 \times 60 \times (120 - 25) = 322.3 \text{ W/m}$$

em que a área global entre alhetas, por metro de tubo, é

$$A_{INTER-ALH} = n 2\pi R_1 S = 200 \times 2 \times \pi \times 0.015 \times 0.003 = 0.05655 \text{ m}^2/\text{m}$$

Portanto o calor global transferido por metro de tubo e por segundo, é:

$$\dot{Q}_{TOT} = \dot{Q}_{ALH} + \dot{Q}_{INTER-ALH} = 5001.4 + 322.3 = 5324 \text{ W/m}.$$

Este resultado poderia também ser obtido através da noção de eficiência global da superfície alhetada:

$$A_{ALH} = n A_t = 200 \times 4.618 \times 10^{-3} = 0.9236 \text{ m}^2$$

$$A_{TOT} = A_{ALH} + A_{INTER-ALH} = 0.9236 + 0.05655 = 0.9802 \text{ m}^2$$

$$\beta = A_{ALH} / A_{TOT} = 0.9236 / 0.9802 = 0.9423$$

$$\eta_{TOT} = (1 - \beta) + \beta \eta = (1 - 0.9423) + 0.95 \times 0.9423 = 0.9529$$

$$\dot{Q}_{TOT} = \eta_{TOT} A_{TOT} h(T_b - T_\infty) = 0.9529 \times 0.9802 \times 60 \times 95 = 5324 \text{ W/m}.$$

valor igual ao anterior, como seria de esperar.

A taxa de calor transferido pelo tubo liso (na ausência de alhetas) é:

$$\dot{Q}_{SEM ALH} = A_{TUBO} h(T_b - T_\infty) = 0.09425 \times 60 \times (120 - 25) = 537.2 \text{ W/m}$$

com $A_{TUBO} = 2\pi R_1 L_{TUBO} = 2 \times \pi \times 0.015 \times 1 = 0.09425 \text{ m}^2/\text{m}$.

A eficácia global deste tubo alhetado é dada por:

$$\varepsilon_{TOT} = \frac{\dot{Q}_{TOT}}{\dot{Q}_{SEM\ ALH}} = \frac{5324}{537.2} = 9.91$$

ou seja, a introdução de alhetas aumenta de 9.9 vezes a taxa de transferência de calor. No caso de uma única alheta, a eficácia é

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_{tot}}{\dot{Q}_{sem\ alheta}} = \frac{25.01}{1.074} = 23.3$$

em que a taxa de calor transferido quando não há alhetas, por uma área igual à área da base da alheta, à temperatura T_b , é

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{sem\ alheta} &= A_b h(T_b - T_\infty) = (2\pi R_l e) h(T_b - T_\infty) = \\ &= (2\pi \times 0.015 \times 0.002) \times 60 \times (120 - 25) = 1.074 \text{ W}.\end{aligned}$$

Conclui-se que a eficácia do conjunto de alhetas disposto no tubo é significativamente inferior à eficácia de uma única alheta (menos de metade).

4.9 Anexo – Dedução de algumas fórmulas para alhetas com área de secção constante

A equação diferencial a resolver é

$$\frac{d^2 T'}{dx^2} = m^2 T' \quad \text{com } T' = T - T_\infty \quad \text{e } m = \sqrt{Ph / Ak}$$

A solução geral desta equação é

$$T'(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

em que C_1 e C_2 são as duas constantes de integração, determinadas a partir das condições de fronteira. É fácil comprovar que esta é a solução da equação diferencial; derivando uma vez tem-se

$$dT' / dx = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx}$$

e derivando novamente

$$d^2 T' / dx^2 = m^2 C_1 e^{mx} + m^2 C_2 e^{-mx} = m^2 (C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}) = m^2 T'$$

ficando claro que $T'(x)$ satisfaz a equação de partida.

Caso a) Alheta infinita

Condições de fronteira:

$$1^{\text{a}} \text{- para } x = 0, T' = T'_b \equiv T_b - T_\infty ;$$

$$2^{\text{a}} \text{- para } x \rightarrow \infty, T' \rightarrow 0 \quad (T_L = T_\infty).$$

A 2ª condição implica $C_1 = 0$, pelo que a solução fica $T'(x) = C_2 e^{-mx}$; a 1ª condição implica $T'(0) = T'_b = C_2 e^{-m \cdot 0} = C_2$ ou $C_2 = T'_b = T_b - T_\infty$. Desta forma, a solução é dada pelo decaimento exponencial da temperatura ao longo da alheta:

$$T'(x) = T'_b e^{-mx}$$

que se pode escrever de forma dimensional

$$T(x) = T_\infty + (T_b - T_\infty) e^{-mx}$$

ou adimensional (com $x' = x / L$)

$$\theta(x') \equiv \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty} = e^{-(mL)x'}$$

A taxa de transferência de calor num plano x é

$$\dot{Q}(x) = -AkdT' / dx = +AkmT'_b e^{-mx}$$

pelo que o calor total transferido pela alheta fica

$$\dot{Q}_{tot} = \dot{Q}(0) = AkmT'_b = \sqrt{AkPh}(T_b - T_\infty).$$

A eficiência é

$$\eta = \dot{Q}_{tot} / \dot{Q}_{max} = \sqrt{AkPh}(T_b - T_\infty) / (PLh(T_b - T_\infty)) = 1 / mL.$$

Caso b) Alheta isolada na ponta

Condições de fronteira:

$$1^{\text{a}} \text{- para } x = 0, T' = T'_b \equiv T_b - T_\infty ;$$

$$2^{\text{a}} \text{- para } x = L, dT' / dx = 0.$$

Substituindo na solução geral:

$$T'_b = C_1 + C_2$$

$$0 = mC_1 e^{mL} - mC_2 e^{-mL}$$

Resolvendo este sistema (por exemplo, multiplicar a 1ª por e^{mL} e subtrair da 2ª; depois multiplicar a 1ª por e^{-mL} e somar à 2ª) obtém-se:

$$C_1 = \frac{T'_b e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \text{ e } C_2 = \frac{T'_b e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}.$$

Substituindo estas constantes na solução geral, obtemos a solução particular para o perfil de temperatura ao longo da alheta:

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{e^{mx} e^{-mL} + e^{-mx} e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} = \frac{e^{m(x-L)} + e^{-m(x-L)}}{e^{mL} + e^{-mL}} \Rightarrow \theta(x') = \frac{\cosh(mL(1-x'))}{\cosh(mL)}$$

Verifica-se uma vez mais que a solução só depende do grupo adimensional mL . A taxa de transferência de calor por condução ao longo da alheta obtém-se da primeira derivada da temperatura:

$$\dot{Q}(x) = -kAdT'/dx = -kA(mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx}) = \frac{kAmT'_b(-e^{-mL} e^{mx} + e^{mL} e^{-mx})}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

ou

$$\dot{Q}(x) = kA \sqrt{\frac{Ph}{kA}} T'_b \frac{(e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)})}{e^{mL} + e^{-mL}} = \sqrt{kAPh}(T_b - T_\infty) \frac{\sinh(m(L-x))}{\cosh(mL)}$$

A taxa total de calor transferida pela alheta é

$$\dot{Q}_{tot} = \dot{Q}(0) = \sqrt{kAPh}(T_b - T_\infty) \frac{\sinh(mL)}{\cosh(mL)} \Rightarrow \dot{Q}_{tot} = \sqrt{kAPh}(T_b - T_\infty) \tanh(mL)$$

e a eficiência da alheta

$$\eta = \dot{Q}_{tot} / \dot{Q}_{max} = \sqrt{kAPh}(T_b - T_\infty) \tanh(mL) / (PLh(T_b - T_\infty)) = \tanh mL / mL.$$

ou

$$\eta = \frac{\tanh(mL)}{mL}.$$

Caso c) Alheta com convecção na ponta (caso mais geral)

Condições de fronteira:

$$1^\text{a} - \text{para } x = 0, T' = T'_b \equiv T_b - T_\infty;$$

$$2^\text{a} - \text{para } x = L, -kdT'/dx = h_e T'.$$

Neste caso a resolução é mais trabalhosa e dá-se só o resultado final:

$$\theta(x') = \frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh(mL(1-x')) + A \sinh(mL(1-x'))}{\cosh(mL) + A \sinh(mL)}$$

em que o parâmetro adimensional $A = h_e / mk$ se pode escrever como $A = \varepsilon' \times mL \times (h_e / h)$, com $\varepsilon' = A / A_l = A / PL$ (inverso da esbelteza, ou espessura relativa; para alheta rectangular $\varepsilon' = e / 2L$; para cilíndrica $\varepsilon' = R / 2L$). A eficiência é:

$$\eta = \frac{\dot{Q}_b}{\dot{Q}_{ideal}} = \frac{1}{mL(1+\varepsilon')} \frac{\sinh(mL) + A \cosh(mL)}{\cosh(mL) + A \sinh(mL)}.$$

Constata-se que a eficiência depende ainda essencialmente de mL , mas depende agora também de ε' e h_e / h .

A figura seguinte (Figura A1) compara as eficiências da alheta infinita, alheta com extremidade isolada, e alheta com convecção na extremidade (caso geral), para relações espessura/comprimento de 1/10 e 1/20 (usa-se $h_e = h$). Verifica-se que para esta última

relação (comprimento 20 vezes superior à espessura) é já pequena a diferença entre a eficiência dada pela fórmula da alheta de extremidade isolada e a fórmula geral. No entanto, o erro no cálculo da quantidade total de calor é aproximadamente igual a ε' , sendo portanto ainda de 2.5% nessa situação ($L/e = 20$). É por isso conveniente usar a superfície total de transferência de calor no cálculo de \dot{Q}_{tot} a partir de η .

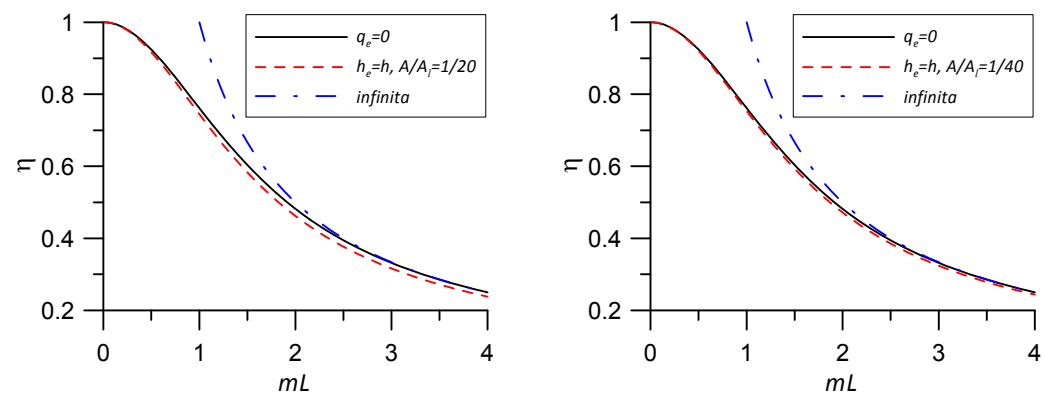
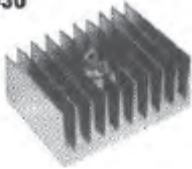







Figura A1 – Gráficos de eficiência de alheta η em função do grupo adimensional mL .

Tabela A – Resistências térmicas globais (convecção mais radiação) de vários dispositivos para arrefecimento de equipamento electrónico. Todas as alhetas são de alumínio, anodizado de negro, com comprimento 76 mm (3'').

HS 5030 	$R = 0.9^{\circ}\text{C/W}$ (vertical) $R = 1.2^{\circ}\text{C/W}$ (horizontal) Dimensions: 76 mm \times 105 mm \times 44 mm Surface area: 677 cm ²
HS 6065 	$R = 5^{\circ}\text{C/W}$ Dimensions: 76 mm \times 38 mm \times 24 mm Surface area: 387 cm ²
HS 6071 	$R = 1.4^{\circ}\text{C/W}$ (vertical) $R = 1.8^{\circ}\text{C/W}$ (horizontal) Dimensions: 76 mm \times 92 mm \times 26 mm Surface area: 968 cm ²
HS 6105 	$R = 1.8^{\circ}\text{C/W}$ (vertical) $R = 2.1^{\circ}\text{C/W}$ (horizontal) Dimensions: 76 mm \times 127 mm \times 91 mm Surface area: 677 cm ²
HS 6115 	$R = 1.1^{\circ}\text{C/W}$ (vertical) $R = 1.3^{\circ}\text{C/W}$ (horizontal) Dimensions: 76 mm \times 102 mm \times 25 mm Surface area: 929 cm ²
HS 7030 	$R = 2.9^{\circ}\text{C/W}$ (vertical) $R = 3.1^{\circ}\text{C/W}$ (horizontal) Dimensions: 76 mm \times 97 mm \times 19 mm Surface area: 290 cm ²

Capítulo 4 – Alhetas (condução de calor em regime permanente)

4.10 Exercícios:

- 1) Um transistor com potência 15 W (máxima) tem uma resistência térmica de 25 °C/W. Se a temperatura máxima admissível for 80 °C, qual a potência limite de funcionamento para uma temperatura exterior, a infinito, de 30 °C?
- 2) Um transistor com potência nominal de 40 W deve ser arrefecido com um dos elementos arrefecedores indicados na tabela dada no final das folhas. Seleccionar um elemento (“heat sink”) que assegure uma temperatura superficial inferior a 90 °C para uma temperatura exterior de 20 °C.
- 3) Uma conduta circular com diâmetro exterior de 5 cm transporta vapor a 180 °C. Para aumentar a taxa de arrefecimento, instalaram-se alhetas circulares transversais de alumínio ($k = 186 \text{ W/(m.K)}$), com diâmetro exterior 6 cm e espessura 1 mm. Quando o passo entre alhetas é de 3 mm, a temperatura do ar adjacente 25 °C e o coeficiente convectivo 40 W/(m².K), calcular o aumento da taxa de transferência de calor como resultado da introdução das alhetas.
- 4) Uma colher de aço inox ($k = 15.1 \text{ W/(m.K)}$) tem a extremidade mergulhada em água a ferver a 95 °C, quando o ambiente na cozinha está a 25 °C. A colher tem secção rectangular, 0.2 cm x 1 cm, e comprimento 18 cm. O coeficiente convectivo para o exterior é 15 W/(m².K). Calcular a potência calorífica dissipado pelo cabo da colher e a temperatura na extremidade.
- 5) Repetir o exercício anterior para uma colher de prata, condutibilidade térmica $k = 427 \text{ W/(m.K)}$.
- 6) Uma placa de circuitos rectangular impregnada em cobre ($k = 20 \text{ W/(m.K)}$), com dimensões 0.3 x 12 x 18 cm³, contém numa das faces 80 chips electrónicos compactados, com 0.04 W de potência cada um. O calor é transferido para a outra face da placa. A temperatura do ar exterior é 40 °C e o coeficiente convectivo 50 W/(m².K). Obter: a) Temperaturas em cada um dos lados da placa; b) Novas temperaturas em cada interface quando se aplica uma placa de alumínio (0.2x12x18 cm, $k = 237 \text{ W/(m.K)}$), com 864 pinos cilíndricos (2 cm comprimento x 0.25 cm diâmetro, cada um), unida à placa electrónica através de uma camada de adesivo epoxy (espessura 0.02 cm, $k = 1.8 \text{ W/(m.K)}$).
- 7) Repetir o exercício anterior quando as alhetas são de cobre e estão montada numa placa de cobre com as mesmas dimensões; condutibilidade térmica do cobre 386 W/(m.K).
- 8) Uma superfície quente (100 °C) é arrefecida com pinos cilíndricos (3 cm comprimento x 0.25 cm diâmetro) de alumínio ($k = 237 \text{ W/(m.K)}$). O arranjo é tal que o espaçamento entre os centros das alhetas é 0.6 cm. A temperatura do ar exterior é 30 °C e o respectivo coeficiente convectivo $h = 35 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$. Calcular a potência dissipada por m² de superfície e o aumento da taxa de arrefecimento decorrente da introdução das alhetas.
- 9) Uma das pás metálicas ($k = 20 \text{ W/(m.K)}$) de uma turbina de gás tem área de secção $A = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ e perímetro $P = 0.11 \text{ m}$ (constantes), e comprimento $L = 5 \text{ cm}$. Verificar se a temperatura máxima nas pás é inferior a 1050°C quando a temperatura dos gases quentes exteriores é 1200 °C e a temperatura na base da coroa em que as pás estão fixadas é 300 °C. O coeficiente de transmissão de calor é $h = 250 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$.

Cap. 5 – Condução de Calor em Regime Variável

Em muitos problemas de interesse prático a transferência de calor é feita em regime variável, o que significa que o campo de temperaturas irá variar ao longo do tempo. Por exemplo, o arrefecimento de um bloco de metal quando submerso num líquido mais frio (processos de tratamento térmico, como a têmpera do metal); o aquecimento de um produto alimentar qualquer (lata de refrigerante) retirado do frigorífico e exposto ao ar ambiente; em anatomia forense, a determinação do instante da morte pela temperatura de um cadáver.

Vamos considerar duas situações:

- 1) **Temperatura uniforme** (o corpo é caracterizado por um único valor de temperatura, ou seja, a temperatura é independente da variável espacial e só varia com o tempo);
- 2) **Temperatura não uniforme**, varia dentro do corpo em análise:
 - Placa plana infinita;
 - Cilindro infinito;
 - Esfera;
 - Corpo semi-infinito.

A primeira situação, de temperatura uniforme, é só aproximada e, para que se verifique, é necessário que a condução de calor no interior do corpo (sólido ou fluido) se faça rapidamente, em comparação com a convecção entre a superfície do corpo e o fluido envolvente. Isto requer um **número de Biot** pequeno:

$$Bi = \frac{hL_c}{k} < 0.1$$

O número de Biot é um parâmetro adimensional que mede a importância da convecção (coeficiente convectivo h [W/m² °C]) relativamente à condução (condutibilidade térmica k [W/m °C]) a dividir por um comprimento característico do corpo, L_c).

Portanto:

$$Bi = \frac{\text{fluxo convectivo com exterior}}{\text{fluxo difusivo}} = \frac{h\Delta T}{k \frac{\Delta T}{L_c}} = \frac{hL_c}{k}$$

Outra forma de interpretar o número de Biot é considerá-lo como a razão entre a resistência térmica à condução de calor no interior do corpo, e a resistência térmica convectiva na sua superfície:

$$Bi = \frac{\text{resistencia da condução}}{\text{resistencia convectiva}} = \frac{R_{t,cond}}{R_{t,conv}} = \frac{\frac{L_c}{Ak}}{\frac{1}{Ah}} = \frac{hL_c}{k}$$

Se a resistência térmica da condução no interior do corpo for pequena, este fica rapidamente em equilíbrio térmico a uma temperatura uniforme (igual em todos os pontos), quando é aquecido (ou arrefecido) por convecção na superfície exterior. O número de Biot é pequeno para corpos de pequena dimensão, feitos de material com

condutibilidade térmica elevada (metais, sólidos bons condutores, etc), e quando o coeficiente convectivo é baixo (convecção natural; o fluido exterior é um gás).

5.1 Análise uniforme

O balanço de energia para um corpo de massa m , volume V e área superficial A_s escreve-se:

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q}_{c,ext} \Rightarrow \frac{d[mc_p(T - T_{ref})]}{dt} = A_s h (T_\infty - T) \Rightarrow mc_p \frac{dT}{dt} = -A_s h (T - T_\infty)$$

Esta equação diz que o aumento da energia interna do corpo, ao longo do tempo, é devido ao fluxo de calor recebido por convecção através da sua superfície exterior (que o separa do fluido envolvente, à temperatura T_∞). Considera-se que a massa do corpo e a sua capacidade térmica mássica a pressão constante c_p são constantes.

A equação diferencial anterior pode escrever-se de forma mais compacta como:

$$\frac{dT'}{dt} = -\frac{A_s h}{mc_p} T' = -b T'$$

com $T' = T - T_\infty$ e $b = \frac{A_s h}{mc_p} = \frac{A_s h}{\rho V c_p} \text{ [s}^{-1}\text{]}$

ou

$$t_c = \frac{1}{b} = \frac{\rho V c_p}{A_s h} \text{ [s]} \quad (\text{tempo característico ou tempo de relaxação}).$$

A solução geral desta equação corresponde a um decaimento exponencial da temperatura:

$$T' = C e^{-t/t_c}$$

Aplicando a condição inicial de $T = T_i$ para $t = 0$ (T_i = temperatura inicial, uniforme, do corpo), a solução particular é:

$$\theta \equiv \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-t/t_c} = e^{-bt}$$

Para escrever esta equação de forma adimensional, define-se primeiramente a **dimensão característica** do corpo como o volume a dividir pela área superficial,

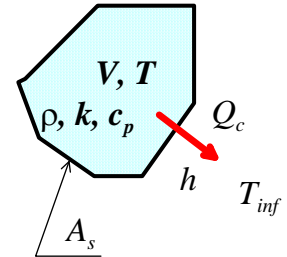
$$L_c = \frac{V}{A_s} \text{ [m]}$$

e introduz-se uma escala de tempo difusiva, igual a L_c^2 / α [s], em que $\alpha = k / (\rho c_p)$ [m²/s] é o coeficiente de difusão de calor (a difusividade térmica). O **tempo adimensional** fica

$$\tau = \frac{\alpha t}{L_c^2}$$

sendo por vezes designado como **número de Fourier**:

$$Fo = \tau \equiv \frac{\alpha t}{L_c^2} \text{ (não tem dimensões).}$$



O resultado final, escrito de forma adimensional, é:

$$\theta = e^{-\tau/\tau_c}$$

com

$$\tau_c = \frac{\alpha t_c}{L_c^2}.$$

Pode ser útil relacionar o tempo característico adimensional com o número de Biot:

$$t_c = \frac{\rho V c_p}{A_s h} = \frac{\rho L_c c_p}{h} = \frac{\rho L_c c_p}{h} \frac{k L_c}{k L_c} = \frac{L_c^2}{\alpha (h L_c / k)} = \frac{L_c^2}{\alpha Bi}$$

ou

$$\tau_c = \frac{t_c}{L_c^2 / \alpha} = \frac{1}{Bi} \Rightarrow \tau_c = \frac{1}{Bi}$$

Logo, a **solução adimensional** pode também escrever-se como

$$\theta = \exp(-Bi \times Fo)$$

Interpretação física do **número de Fourier** (que no fundo não é mais que um tempo adimensional):

$$Fo = \frac{\text{taxa de calor transferido por condução}}{\text{calor acumulado no corpo por unidade tempo}} = \frac{k A \Delta T / L_c}{\rho V c_p \Delta T / t} = \frac{\alpha t}{L_c^2}$$

Corpos pequenos de material com capacidade térmica baixa e condutibilidade elevada, irão ter tendência para apresentar um número de Fourier elevado. Só no estágio inicial do processo de arrefecimento (ou aquecimento) é que o Fo será baixo.

5.2 Análise não uniforme

Neste caso a análise matemática do arrefecimento do corpo por convecção na superfície exterior só é possível para corpos com forma simples: (i) parede plana de espessura $2L$; (ii) cilindro infinito de raio R ; (iii) esfera de raio R ; (iv) corpo semi-infinito. Mesmo assim, a solução analítica é complicada (séries infinitas de funções transcendentais, que se escrevem, de forma sintética, $\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \tau}$) e por isso na prática usam-se gráficos

que dão a solução em termos do número de Biot e do número de Fourier (ver **gráficos de Heisler em Anexo**). É possível, no entanto, como primeira aproximação considerar unicamente o primeiro termo dessas séries, quando o número de Fourier não é pequeno. Na prática, esta aproximação é válida desde que $\tau \equiv Fo > 0.2$.

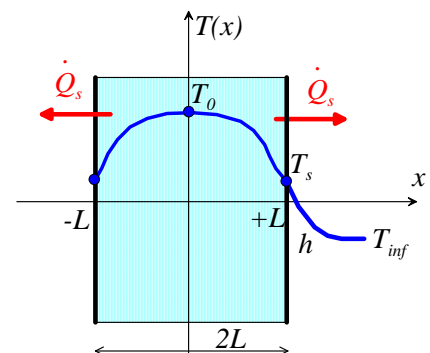
5.2.1 Placa plana infinita, meia espessura L

Aproximação para o perfil de temperatura:

$$\theta(x, \tau) \equiv \frac{T(x, \tau) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos(\lambda_1 x / L)$$

Os valores das constantes A_1 e λ_1 são dadas na **Tabela 1**, em função do número de Biot, $Bi = hL / k$.

Temperatura no plano central ($x = 0$), com $\tau = \alpha t / L^2$:



$$\theta_0(\tau) \equiv \frac{T_0(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

Temperatura na superfície ($x = L$):

$$\theta_s(\tau) \equiv \frac{T_s(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos \lambda_1 \quad \text{ou} \quad \theta_s = \theta_0 \cos \lambda_1$$

Calor transferido por uma das superfícies (os dois planos laterais), por unidade de área da parede, desde o instante inicial até um instante qualquer $\tau = \alpha t / L^2$:

$$\frac{Q(\tau)}{Q_{\max}} = 1 - \theta_0 \frac{\sin \lambda_1}{\lambda_1}$$

em que $Q_{\max} = \rho c_p L |T_i - T_\infty|$ é o calor máximo passível de ser transferido de, ou para, a placa (por unidade de área).

5.2.2 Cilindro infinito, raio R

Aproximação para o perfil de temperatura:

$$\theta(r, \tau) \equiv \frac{T(r, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} J_0(\lambda_1 r / R)$$

Os valores das constantes A_1 e λ_1 são dadas na **Tabela 1**, em função do número de Biot, $Bi = hR / k$ e $J_0(x)$ é uma função de Bessel, cujos valores são dados na **Tabela 2**.

Temperatura no eixo ($r = 0$), com $\tau = \alpha t / R^2$:

$$\theta_0(\tau) \equiv \frac{T_0(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

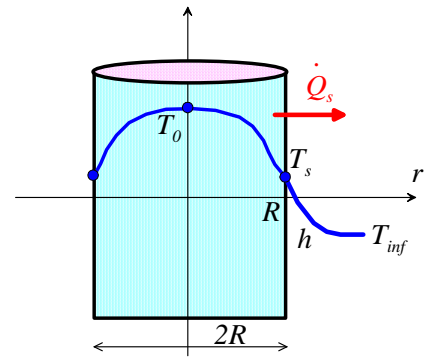
Temperatura na superfície ($r = R$):

$$\theta_s(\tau) \equiv \frac{T_s(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} J_0(\lambda_1) \quad \text{ou} \quad \theta_s = \theta_0 J_0(\lambda_1)$$

Calor transferido pela superfície, por metro de comprimento do cilindro, desde o instante inicial até um instante qualquer $\tau = \alpha t / R^2$:

$$\frac{Q(\tau)}{Q_{\max}} = 1 - 2\theta_0 \frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1}$$

em que $Q_{\max} = \rho c_p \pi R^2 |T_i - T_\infty|$ é o calor máximo que o cilindro pode ceder ou receber do exterior a T_∞ (por unidade de comprimento do cilindro).



5.2.3 Esfera, raio R

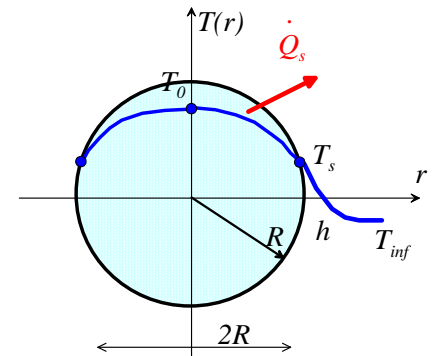
Aproximação para o perfil de temperatura:

$$\theta(r, \tau) \equiv \frac{T(r, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \frac{1}{\lambda_1 r / R} \sin(\lambda_1 r / R)$$

Os valores das constantes A_1 e λ_1 são dadas na **Tabela 1**, em função do número de Biot, $Bi = hR / k$.

Temperatura no centro ($r = 0$), com $\tau = \alpha t / R^2$:

$$\theta_0(\tau) \equiv \frac{T_0(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$



Temperatura na superfície ($r = R$):

$$\theta_s(\tau) \equiv \frac{T_s(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \frac{\sin \lambda_1}{\lambda_1} \quad \text{ou} \quad \theta_s = \theta_0 \frac{\sin \lambda_1}{\lambda_1}$$

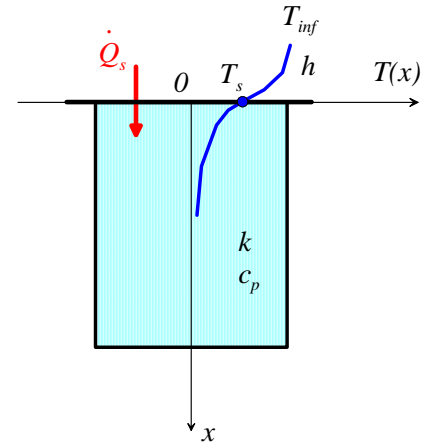
Calor transferido pela superfície da esfera, desde o instante inicial até um instante qualquer $\tau = \alpha t / R^2$:

$$\frac{Q(\tau)}{Q_{\max}} = 1 - 3\theta_0 \frac{\sin \lambda_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1}{\lambda_1^3}$$

em que $Q_{\max} = \rho c_p \frac{4}{3} \pi R^3 |T_i - T_\infty|$ é o calor máximo que a esfera pode ceder ou receber na presença de um ambiente a T_∞ .

5.2.4 Corpo semi-infinito

Um corpo de grandes dimensões está inicialmente a temperatura uniforme T_i e, no instante inicial $t = 0$, é aquecido (ou arrefecido) na superfície exposta ($x = 0$) por convecção com um fluido exterior à temperatura T_∞ . A coordenada espacial x aponta da superfície para o interior do corpo. O material do corpo tem condutibilidade térmica k , capacidade térmica mássica c_p , massa volúmica ρ e difusividade térmica $\alpha = k / \rho c_p$; o coeficiente convectivo exterior é h .



A variação de temperatura no corpo, ao longo do tempo, é dada por:

$$\theta(x, t) \equiv \frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)$$

Nesta equação $\operatorname{erfc}(x)$ representa a função complementar erro, dada na **Tabela 3**. Em vez de se usar esta expressão analítica, pode obter-se a temperatura do gráfico dado no **Anexo 3** (Figura 4). Nesse gráfico θ é representado em função dos parâmetros adimensionais:

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \quad (\text{distância } x \text{ adimensionalizada com a profundidade de penetração do calor } L_t = \sqrt{\alpha t})$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} \quad (\text{um número de Biot } hL_t / k \text{ baseado na profundidade de penetração do calor } L_t = \sqrt{\alpha t})$$

Repare-se também que a presente definição da temperatura adimensional está relacionada com a utilizada acima, para a placa plana, por:

$$\theta(x, t) = \frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

No caso em que o aquecimento superficial se faz especificando a temperatura da superfície ($T_s = T(x = 0)$), o que é equivalente a fazer $h = \infty$ e $T_\infty = T_s$ na expressão anterior, esta simplifica-se para:

$$\theta(x, t) \equiv \frac{T(x, t) - T_i}{T_s - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

e o fluxo de calor na superfície, obtido pela lei de Fourier, fica:

$$\dot{q}_s(t) \equiv \dot{q}(x=0, t) = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}.$$

5.3 Princípio da sobreposição

Geometrias mais complexas e realistas, que possam ser vistas como compostas por vários casos sobrepostos correspondentes às situações mais simples tratadas de i a iv, são resolvidas recorrendo ao princípio da sobreposição. Como os problemas de condução de calor aqui analisados são lineares, a solução de um caso mais complicado é dada pelo produto das soluções de base, desde que a soma das condições de fronteira destas seja igual às condições de fronteira do problema complicado.

Isto entende-se melhor com alguns exemplos. A solução do problema de condução de calor num paralelepípedo de meia largura L_x segundo x , L_y segundo y e L_z segundo z (o volume é $2L_x \times 2L_y \times 2L_z$), com convecção através da superfície exterior para um fluido envolvente a T_∞ e coeficiente uniforme h , será dada por:

$$\theta(x, y, z, t) = \theta_{placa\ 2L_x}(x, \tau) \times \theta_{placa\ 2L_y}(y, \tau) \times \theta_{placa\ 2L_z}(z, \tau)$$

A solução para cada “placa infinita” $\theta_{placa}(x_i, \tau)$ é dada pelos resultados da Secção i.

Outro exemplo: arrefecimento de um corpo cilíndrico de altura H , comparável com o raio R (isto é, o cilindro não é infinito). A solução é o produto do resultado para cilindro infinito $\theta_{cilind\ R}(r, \tau)$ (Secção ii) e o resultado para placa plana infinita com separação $2L_z = H$, $\theta_{placa\ 2L_z}(z, \tau)$:

$$\theta(r, z, t) = \theta_{cilind\ R}(r, \tau) \times \theta_{placa\ 2L_z}(z, \tau).$$

Esta técnica permite obter soluções bi e tridimensionais baseadas nas soluções “simples” unidimensionais dadas atrás.

5.4 Exemplos ilustrativos

Exemplo 1 – Análise de estado uniforme. Uma esfera de aço de 5 cm de diâmetro está inicialmente à temperatura uniforme de 450 °C e é subitamente colocada num ambiente a 100 °C. Calcular o tempo necessário para a temperatura da esfera baixar para 150°C. Dados: aço, $k = 35\text{ W/(m K)}$, $\rho = 7800\text{ kg/m}^3$, $c_p = 0.46\text{ kJ/(kg °C)}$; coeficiente convectivo $h = 10\text{ W/(m}^2\text{ °C)}$.

Para se verificar se a análise de corpo uniforme pode ser aplicada, calcula-se o número de Biot:

$$Bi = \frac{hL_c}{k}$$

A dimensão característica é

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3} = \frac{5/2}{3} = 0.833\text{ cm}$$

logo

$$Bi = \frac{10 \times 0.00833}{35} = 0.00238$$

Como $Bi \ll 1$ conclui-se que é perfeitamente razoável assumir temperatura uniforme no seio da esfera de aço. Para uma temperatura final de $T = 150^\circ\text{C}$, a temperatura adimensional é:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{150 - 100}{450 - 100} = 0.1428$$

e o tempo adimensional decorrido obtém-se por inversão da solução analítica

$$\theta = e^{-\tau/\tau_c} \Rightarrow \tau = -\tau_c \ln \theta = -\ln(0.1428) / 0.00238 = 817.3$$

em que se usa o facto do tempo de relaxação adimensional τ_c ser igual ao inverso do número de Biot, Bi . A difusividade térmica do aço é dada por

$$\alpha = k / \rho c_p = 35 / 7800 \times 460 = 9.75 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

e o tempo dimensional (em segundos) vem:

$$t = \tau L_c^2 / \alpha = \frac{817.3 \times 0.00833^2}{9.75 \times 10^{-6}} = 5814 \text{ s}$$

ou seja, $t = 5814 / 3600 = 1.61 \text{ h}$. Conclusão: a esfera de aço, inicialmente a 450°C , só ao fim de 1 h e 37 min arrefece até ficar a 150°C .

Exemplo 2 – Uma pessoa é encontrada morta às 17h, sendo a sua temperatura medida de 25°C . Considerando que o ar ambiente está a 20°C , que o coeficiente de transmissão de calor é aproximadamente $8 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ }^\circ\text{C})$ e que a temperatura normal dum corpo vivo é 37°C , estimar a hora da morte. As propriedades físicas de corpo humano podem ser aproximadas pelas da água ($\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$, $k = 0.608 \text{ W}/(\text{m K})$, $c_p = 4.18 \text{ kJ}/(\text{kg }^\circ\text{C})$) e a geometria do corpo idealizada como um cilindro de altura 1.70 m e diâmetro 30 cm.

Assumindo análise uniforme, o comprimento característico é:

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\pi R^2 H}{2\pi R^2 + 2\pi RH} = \frac{R}{2(R/H + 1)} = 0.0689 \text{ m}$$

para uma altura do cilindro equivalente $H = 1.70 \text{ m}$ e raio $R = 0.15 \text{ m}$. O correspondente número de Biot vem

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{8 \times 0.0689}{0.608} = 0.907$$

Constata-se que o número de Biot é superior a 0.1 e por isso a análise uniforme não pode, em princípio, ser aplicada. Mesmo assim, vamos usá-la para obter uma aproximação da hora da morte, mesmo que grosseira. A temperatura final adimensional é:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{25 - 20}{37 - 20} = 0.2941$$

e o tempo adimensional

$$\tau = -\tau_c \ln \theta = -\ln(0.2941) / 0.907 = 1.349$$

O tempo real será portanto, com $\alpha = k / \rho c_p = 0.608 / 1000 / 4180 = 1.454 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$,

$$t = \tau L_c^2 / \alpha = \frac{1.345 \times 0.0689^2}{1.454 \times 10^{-7}} = 44\,068 \text{ s}$$

ou seja, o tempo decorrido foi 12.24 h. Logo a hora da morte teria sido às 4.8 h da manhã.

Este cálculo é agora confirmado com o método da análise não uniforme, em que se faz a aproximação de cilindro infinito. O número de Biot é baseado no raio do cilindro:

$$Bi = \frac{hR}{k} = \frac{8 \times 0.15}{0.608} = 1.974$$

Para este valor de Bi , a Tabela 1 fornece as constantes $\lambda_1 = 1.5995$ e $A_1 = 1.3384$. A temperatura no centro do cilindro é dada por

$$\theta_0(\tau) = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{25 - 20}{37 - 20} = 0.2941 = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

logo

$$\tau = -\ln(\theta_0 / A_1) / \lambda_1^2 \quad \tau = -\ln(0.2941 / 1.3384) / 1.5995^2 = 0.5923$$

superior a 0.2, e o tempo dimensional

$$t = \tau R^2 / \alpha = \frac{0.5923 \times 0.15^2}{1.454 \times 10^{-7}} = 91\,650 \text{ s}$$

ou seja, $t = 25.4$ h. Esta análise resulta num intervalo de tempo muito mais longo, que colocaria a hora da morte nas 15.5 h do dia anterior.

Exemplo 3 – Aquecimento de lata de cerveja por convecção natural. A lata é considerada como um cilindro de dimensões 15 cm (altura) e 5.5 cm (diâmetro), foi retirada do frigorífico à temperatura uniforme de 5 °C, o ar ambiente está a 25 °C e o coeficiente de transmissão de calor, combinando convecção e radiação, é 10 W/(m² °C). As propriedades físicas da cerveja são assumidas como idênticas às da água, massa volúmica 1000 kg/m³, condutibilidade térmica 0.61 W/(m °C) e capacidade térmica mássica a pressão constante 4180 J/(kg °C). A lata é pousada em cima de uma mesa, não havendo transferência de calor através da base (uma aproximação), e pretende-se saber a temperatura no centro e superfície da base do cilindro, e no centro do topo, após 30 minutos.

Para um raio da base de $R = D/2 = 5.5/2 = 2.75$ cm, o volume do cilindro é $V = \pi R^2 H = \pi \times 2.75^2 \times 15 = 356 \text{ cm}^3$, ou mL, uma capacidade semelhante à esperada (33 cL), embora um pouco superior, como seria desejável. Vamos fazer a análise com graus sucessivos de aproximação.

1º) Assumindo que a temperatura da cerveja dentro da lata é uniforme (análise uniforme), a temperatura adimensional será dada pela variação exponencial $\theta = \exp(-\tau / \tau_c)$. Para que esta aproximação seja válida o número de Biot tem de ser inferior a 0.1. Assumindo que a troca de calor se dá unicamente pela superfície lateral do cilindro e pelo topo com forma circular (uma vez que a base está isolada), a dimensão característica é:

$$L_c = V / A_s = (\pi R^2 H) / (2\pi RH + \pi R^2) = 356.4 / (259.2 + 23.8) = 1.260 \text{ cm}$$

e o número de Biot é calculado como:

$$Bi = hL_c / k = 10 \times 0.01260 / 0.61 = 0.2065$$

Verifica-se ser superior a 0.1, pelo que a análise uniforme deverá ser vista como uma aproximação que pode ser grosseira. A difusividade térmica da cerveja é

$$\alpha = k / (\rho c_p) = 0.61 / (1000 \times 4180) = 1.459 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

e para um tempo de 30 minutos, ou seja $t = 30 \times 60 = 1800$ s, o tempo adimensional vem

$$\tau = \alpha t / L_c^2 = 1.459 \times 10^{-7} \times 1800 / 0.01260^2 = 1.656$$

enquanto o tempo adimensional característico é dado pelo inverso do número de Biot,

$$\tau_c = 1 / Bi = 1 / 0.2065 = 4.843$$

Assim, a temperatura adimensional, ao fim de 30 minutos, é

$$\theta = \exp(-\tau / \tau_c) = \exp(-1.656 / 4.843) = 0.7104$$

e a temperatura dimensional (em todos os pontos da lata):

$$T = T_{\infty} + \theta(T_i - T_{\infty}) = 25 - 20 \times 0.7104 = 10.8 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

2º) Como na aproximação anterior o número de Biot é superior a 0.1, numa tentativa de melhorar a aproximação considera-se agora a lata como se fosse um cilindro infinito. A dimensão característica da lata é dada pelo seu raio $R = 2.75 \text{ cm}$ e o número de Biot é agora definido como

$$Bi = hR / k = 10 \times 0.0275 / 0.61 = 0.4508$$

Para este valor, os coeficientes da solução (Tabela 1 para cilindro) são dados por:

$$\lambda_1 = 0.89693 \text{ e } A_1 = 1.10387$$

e a tempo adimensional para 30 minutos

$$\tau = \alpha t / R^2 = 1.459 \times 10^{-7} \times 1800 / 0.0275^2 = 0.3473.$$

Como este tempo é superior a 0.2, torna-se permissível fazer a aproximação tratada acima (série infinita aproximada pelo primeiro termo). Neste caso, a temperatura adimensional no eixo é dada por

$$\theta_0 = A_1 \exp(-\lambda_1^2 \tau) = 1.10387 \times \exp(-0.8969^2 \times 0.3473) = 0.83476$$

e o correspondente valor em graus Celsius

$$T_0 = T_{\infty} + \theta_0(T_i - T_{\infty}) = 25 - 20 \times 0.83476 = 8.30 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Repare-se que este valor para a temperatura no centro da base (igual à temperatura no eixo do cilindro, uma vez que o cilindro é infinito) é superior ao obtido pelo método anterior: ao se assumir temperatura uniforme, o aquecimento é mais rápido.

A temperatura na superfície do cilindro é calculada pela fórmula

$$\theta_s = \theta_0 \times J_0(\lambda_1)$$

com, da Tabela 2,

$$J_0(0.89693) = 0.80869$$

o que dá

$$\theta_s = 0.83476 \times 0.80869 = 0.6751$$

ou seja,

$$T_s = T_{\infty} + \theta_s(T_i - T_{\infty}) = 25 - 20 \times 0.6751 = 11.5 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Como seria de esperar, a temperatura na superfície exterior do cilindro (da lata) é superior à temperatura no centro (aquece mais depressa). Além disso, existe uma variação significativa entre as duas, $11.5 - 8.3 = 3.2 \text{ }^{\circ}\text{C}$ (38% da temperatura central), mostrando de alguma forma o erro cometido pela análise anterior (temperatura uniforme).

3º) Cilindro finito, dado pela intersecção da solução para cilindro infinito com a solução para placa plana separada por meia espessura 15 cm (uma vez que o plano central tem $q=0$). Nesta situação, para placa plana, o comprimento característico é $L = H = 15 \text{ cm}$. O número de Biot vem

$$Bi = hH / k = 10 \times 0.15 / 0.61 = 2.459$$

bastante superior a 0.1, e o tempo adimensional

$$\tau = \alpha t / H^2 = 1.459 \times 10^{-7} \times 1800 / 0.15^2 = 0.01167$$

muito inferior a 0.2, o que causa problemas. Para um valor tão baixo do tempo adimensional não se espera que a série tenha convergido quando esta é representada unicamente pelo primeiro termo. De facto, para $Bi = 2.459$ a Tabela 1 dá os coeficientes

$\lambda_1 = 1.1300$ e $A_1 = 1.1930$, que fornecem um valor da temperatura no centro da placa plana de:

$$\theta_0 = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} = 1.1930 \exp(-1.1300^2 \times 0.01167) = 1.175$$

Este valor é superior a 1 e por isso não pode estar certo. Como o tempo adimensional é muito inferior a 0.2, torna-se necessário usar mais termos da série infinita que dá a solução. Esse cálculo não é possível com os conhecimentos disponíveis, mas com base na solução analítica resulta nos valores dados na seguinte tabela:

$n =$	λ_n	A_n	$\theta_{0,placa}$
1	1.1375	+1.1953	1.1774
2	3.7250	-0.2633	0.9535
3	6.6380	-0.09977	1.0131
4	9.6737	-0.04971	0.9965
5	12.757	+0.02925	1.0008
6	15.862	-0.01913	0.9998

A temperatura central da placa plana infinita é portanto muito perto de 1.0. Desta forma, a solução no ponto central do problema tridimensional, dado pela intersecção da solução para o cilindro infinito e a solução para a placa plana, é:

$$\theta_0 = \theta_{0,placa} \times \theta_{0,cil} = 1.000 \times 0.83476 = 0.83476$$

ou seja,

$$T_0 = 25 - \theta_0 \times 20 = 25 - 0.83476 \times 20 = 8.30 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Na superfície da lata, sobre a mesa, tem-se

$$\theta_s = \theta_{0,placa} \times \theta_{s,cil} = 1.000 \times 0.6751 = 0.6751$$

o que dá

$$T_s = 25 - \theta_s \times 20 = 25 - 0.6751 \times 20 = 11.5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

No topo da lata, no seu centro, tem-se

$$\theta_t = \theta_{s,placa} \times \theta_{o,cil}$$

em que a temperatura na superfície da placa plana, com base na 1ª aproximação, é

$$\theta_{s,placa} = \theta_{o,placa} \times \cos \lambda_{1,placa} = 1.000 \times \cos 1.1375 = 0.4199$$

Este valor é baseado num único termo da série, o que estará claramente em erro para este caso. Fazendo o cálculo mais correcto (não possível aqui), dá

$$\theta_{s,placa} = 0.7588$$

e por isso

$$\theta_t = 0.7588 \times 0.83476 = 0.6334$$

ou seja

$$T_t = 25 - \theta_t \times 20 = 25 - 0.6334 \times 20 = 12.3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Conclui-se que passado 30 minutos, a lata de cerveja retirada do frigorífico a 5°C, e exposta ao ar a 25 °C, tem o centro da base (pousada na mesa, sem perda de calor) a 8.3 °C, a superfície da lata nesse plano (junto à mesa) é um pouco superior, 11.5 °C, e o centro do topo da lata está um pouco mais quente, a 12.3 °C.

5.5 Anexo 1 – Material avançado: Soluções analíticas para placa plana, cilindro e esfera

A temperatura adimensional para o problema do arrefecimento convectivo, através das superfícies exteriores, de placa plana, cilindro ou esfera, é definida como:

$$\theta \equiv \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}}$$

em que T_{∞} é a temperatura do fluido a infinito, longe da superfície, e T_i é a temperatura inicial (uniforme) de cada geometria (placa, cilindro ou esfera). A temperatura adimensional no centro é:

$$\theta_0 \equiv \frac{T_0 - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}}$$

5.5.1 Placa plana (espessura $2L$)

O perfil lateral de temperatura no tempo $\tau = \alpha t / L^2$ é dado por:

$$\theta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n x / L)$$

com coeficientes

$$A_n = \frac{2 \sin \lambda_n}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n}; \quad \text{ou} \quad A_n = \frac{2(\lambda_n^2 + Bi^2)}{[(\lambda_n^2 + Bi^2) + Bi]} \frac{\sin \lambda_n}{\lambda_n};$$

$$\text{ou} \quad A_n = \frac{2Bi}{[\lambda_n^2 + Bi + Bi^2]} \frac{1}{\cos \lambda_n},$$

em que $Bi = hL / k$ é o número de Biot. Os valores próprios λ_n são as soluções positivas da equação transcendente:

$$\lambda_n \sin \lambda_n - Bi \cos \lambda_n = 0 \quad \text{ou} \quad \tan \lambda_n = \frac{Bi}{\lambda_n}$$

obtidas numericamente, usando o método de Newton-Raphson (programa ytan.for); podem também ser obtidas de tabelas. A temperatura no centro da placa, $x = 0$, é dada por:

$$\theta_0(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \tau}.$$

A quantidade de calor transferida através de uma das superfícies da placa (área A), desde o tempo inicial até ao tempo τ , dada como fracção do calor inicialmente contido em meia placa $Q_i = LA\rho c_p (T_i - T_{\infty})$, é:

$$\frac{Q(\tau)}{Q_i} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2Bi^2}{\lambda_n^2 (\lambda_n^2 + Bi + Bi^2)} \right] (1 - e^{-\lambda_n^2 \tau})$$

5.5.2 Cilindro infinito

O perfil radial de temperatura no tempo $\tau = \alpha t / R^2$ é dado por:

$$\theta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \tau} J_0(\lambda_n r / R)$$

com coeficientes

$$A_n = \frac{2Bi}{(\lambda_n^2 + Bi^2)J_0(\lambda_n)}$$

em que $Bi = hR/k$ é o número de Biot. Os valores próprios λ_n são as soluções positivas da equação transcendente:

$$\lambda_n J_1(\lambda_n) - Bi \times J_0(\lambda_n) = 0.$$

obtidas numericamente, usando o método da bissecção (programa ybess2.for), e podem ser obtidas de tabelas. A temperatura no eixo do cilindro, $r = 0$, é dada por:

$$\theta_0(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \tau}.$$

A quantidade de calor transferida através da superfície do cilindro, desde o tempo inicial até τ , dada como fracção do calor inicialmente contido no cilindro de altura H $Q_i = \pi R^2 H \rho c_p (T_i - T_\infty)$, é:

$$\frac{Q(\tau)}{Q_i} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{Bi^2}{\lambda_n^2 (\lambda_n^2 + Bi^2)} \right] (1 - e^{-\lambda_n^2 \tau})$$

5.5.3 Esfera

O perfil radial de temperatura no tempo $\tau = \alpha t / R^2$ é dado por:

$$\theta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \frac{\sin(\lambda_n r / R)}{(\lambda_n r / R)} \right]$$

com coeficientes

$$A_n = \frac{2(\sin \lambda_n - \lambda_n \cos \lambda_n)}{\lambda_n - \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \text{ ou } A_n = \frac{2Bi \sin \lambda_n}{\lambda_n - \sin \lambda_n \cos \lambda_n}$$

em que $Bi = hR/k$ é o número de Biot. Os valores próprios λ_n são as soluções positivas da equação transcendente:

$$\lambda_n \cos \lambda_n - (1 - Bi) \sin \lambda_n = 0 \text{ ou } \cotan \lambda_n = -\frac{(Bi - 1)}{\lambda_n}.$$

obtidas numericamente, usando o método da bissecção (programa ycotan.for), ou lidas de tabelas. A temperatura no centro da esfera, $r = 0$, é dada por:

$$\theta_0(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \tau}.$$

A quantidade de calor transferida através da superfície do cilindro, desde o tempo inicial até τ , dada como fracção do calor inicialmente contido na esfera $Q_i = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho c_p (T_i - T_\infty)$, é:

$$\frac{Q(\tau)}{Q_i} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \lambda_n - \lambda_n \cos \lambda_n}{\lambda_n^3 (\lambda_n - \sin \lambda_n \cos \lambda_n)} \right] (1 - e^{-\lambda_n^2 \tau}).$$

5.6 Anexo 2 – Tabelas para condução em regime variável

Tabela 1 – Coeficientes do 1º termo da série que dá a solução analítica para a transferência de calor por convecção de placa plana infinita, cilindro infinito e esfera.

Bi	<i>Placa plana</i>		<i>Cilindro infinito</i>		<i>Esfera</i>	
	λ_1	A_1	λ_1	A_1	λ_1	A_1
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.1	0.3111	1.0161	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.2	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.3	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0931	1.0528	1.1164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0184	1.1345	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0918	1.0873	1.1539	1.3525	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1724	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1785	1.5995	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7202
5.0	1.3138	1.2403	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8673
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8920
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2880	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
∞	1.5708	1.2732	2.4048	1.6021	3.1416	2.0000

Tabela 2 – Funções de Bessel de 1ª espécie, de ordem 0 e 1.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000	1.5	0.5118	0.5579
0.1	0.9975	0.0499	1.6	0.4554	0.5699
0.2	0.9900	0.0995	1.7	0.3980	0.5778
0.3	0.9776	0.1483	1.8	0.3400	0.5815
0.4	0.9604	0.1960	1.9	0.2818	0.5812
0.5	0.9385	0.2423	2.0	0.2239	0.5767
0.6	0.9120	0.2867	2.1	0.1666	0.5683
0.7	0.8812	0.3290	2.2	0.1104	0.5560
0.8	0.8463	0.3688	2.3	0.0555	0.5399
0.9	0.8075	0.4059	2.4	0.0025	0.5202
1.0	0.7652	0.4400	2.6	-0.0968	-0.4708
1.1	0.7196	0.4709	2.8	-0.1850	-0.4097
1.2	0.6711	0.4983	3.0	-0.2601	-0.3391
1.3	0.6201	0.5220	3.2	-0.3202	-0.2613
1.4	0.5669	0.5419			

Tabela 3 – Função erro complementar ($\text{erfc}(x) = 1.0 - \text{erf}(x)$).

η	$\text{erfc}(\eta)$	η	$\text{erfc}(\eta)$	η	$\text{erfc}(\eta)$	η	$\text{erfc}(\eta)$	η	$\text{erfc}(\eta)$	η	$\text{erfc}(\eta)$
0.00	1.00000	0.38	0.5910	0.76	0.2825	1.14	0.1069	1.52	0.03159	1.90	0.00721
0.02	0.9774	0.40	0.5716	0.78	0.2700	1.16	0.10090	1.54	0.02941	1.92	0.00662
0.04	0.9549	0.42	0.5525	0.80	0.2579	1.18	0.09516	1.56	0.02737	1.94	0.00608
0.06	0.9324	0.44	0.5338	0.82	0.2462	1.20	0.08969	1.58	0.02545	1.96	0.00557
0.08	0.9099	0.46	0.5153	0.84	0.2349	1.22	0.08447	1.60	0.02365	1.98	0.00511
0.10	0.8875	0.48	0.4973	0.86	0.2239	1.24	0.07950	1.62	0.02196	2.00	0.00468
0.12	0.8652	0.50	0.4795	0.88	0.2133	1.26	0.07476	1.64	0.02038	2.10	0.00298
0.14	0.8431	0.52	0.4621	0.90	0.2031	1.28	0.07027	1.66	0.01890	2.20	0.00186
0.16	0.8210	0.54	0.4451	0.92	0.1932	1.30	0.06599	1.68	0.01751	2.30	0.00114
0.18	0.7991	0.56	0.4284	0.94	0.1837	1.32	0.06194	1.70	0.01612	2.40	0.00069
0.20	0.7773	0.58	0.4121	0.96	0.1746	1.34	0.05809	1.72	0.01500	2.50	0.00041
0.22	0.7557	0.60	0.3961	0.98	0.1658	1.36	0.05444	1.74	0.01387	2.60	0.00024
0.24	0.7343	0.62	0.3806	1.00	0.1573	1.38	0.05098	1.76	0.01281	2.70	0.00013
0.26	0.7131	0.64	0.3654	1.02	0.1492	1.40	0.04772	1.78	0.01183	2.80	0.00008
0.28	0.6921	0.66	0.3506	1.04	0.1413	1.42	0.04462	1.80	0.01091	2.90	0.00004
0.30	0.6714	0.68	0.3362	1.06	0.1339	1.44	0.04170	1.82	0.01006	3.00	0.00002
0.32	0.6509	0.70	0.3222	1.08	0.1267	1.46	0.03895	1.84	0.00926	3.20	0.00001
0.34	0.6306	0.72	0.3086	1.10	0.1198	1.48	0.03635	1.86	0.00853	3.40	0.00000
0.36	0.6107	0.74	0.2953	1.12	0.1132	1.50	0.03390	1.88	0.00784	3.60	0.00000

5.7 Anexo 3 – Gráficos de Heisler para placa plana, cilindro e esfera, e gráfico para o corpo semi-infinito (obtidos de Cengel).

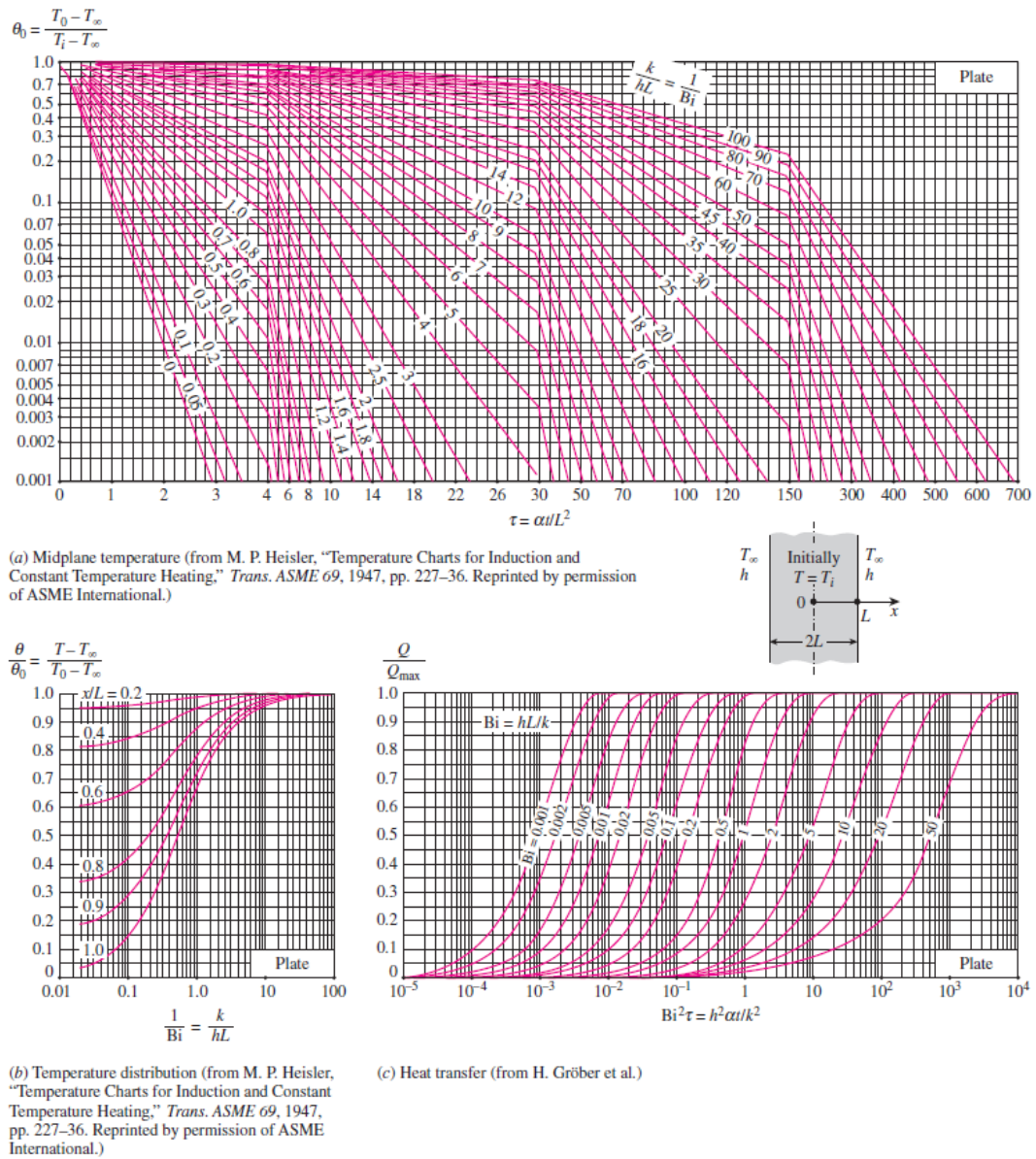
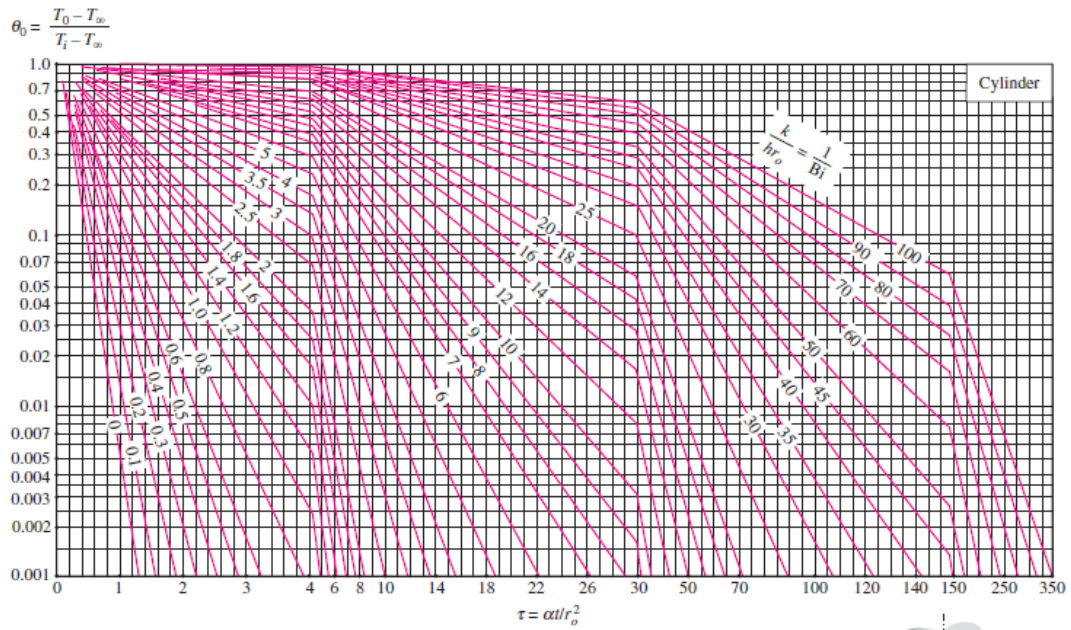
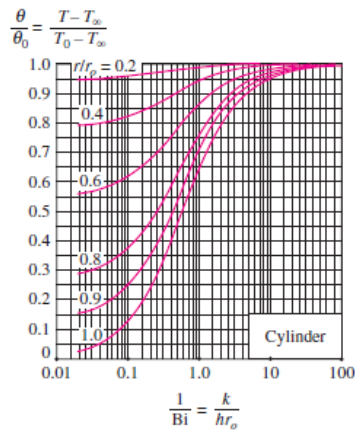


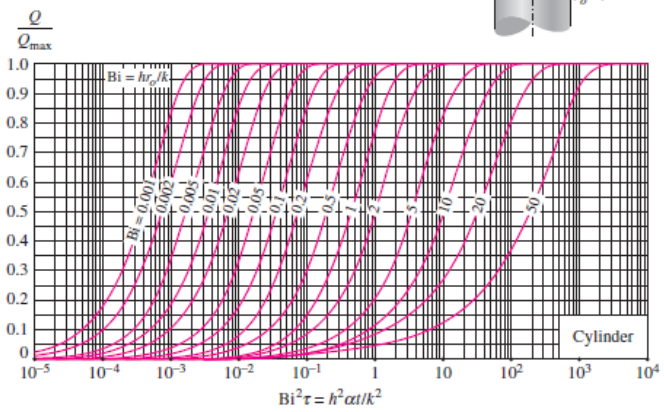
Figura 1 - Placa plana de espessura $2L$, segundo a direcção x , e grande dimensão nas direcções perpendiculares a x , inicialmente à temperatura uniforme T_i , e submetida a arrefecimento convectivo (coeficiente h ; temperatura a infinito T_∞) em ambas as faces. Gráficos da variação temporal da temperatura no centro da placa ($x=0$), do perfil lateral de temperaturas, e do calor transferido desde o tempo inicial.



(a) Centerline temperature (from M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating," *Trans. ASME* 69, 1947, pp. 227–36. Reprinted by permission of ASME International.)

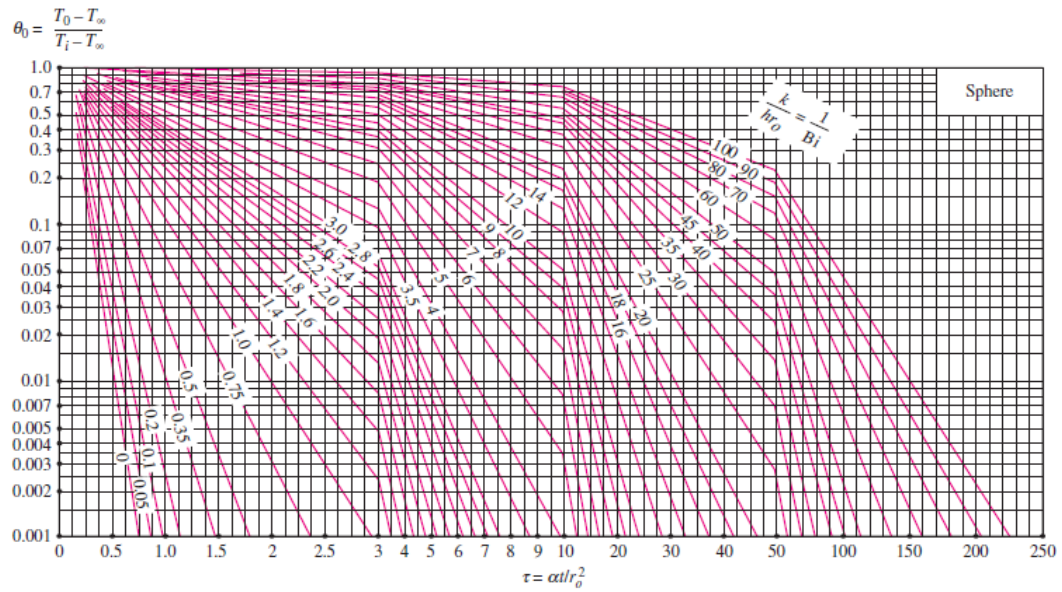


(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating," *Trans. ASME* 69, 1947, pp. 227–36. Reprinted by permission of ASME International.)

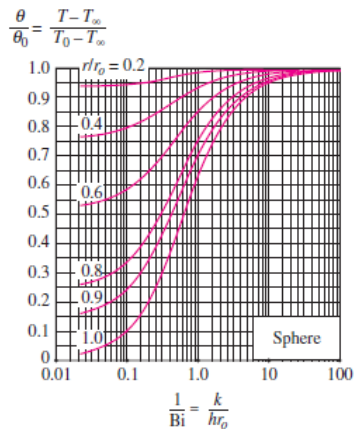
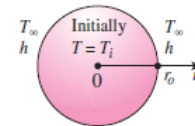


(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

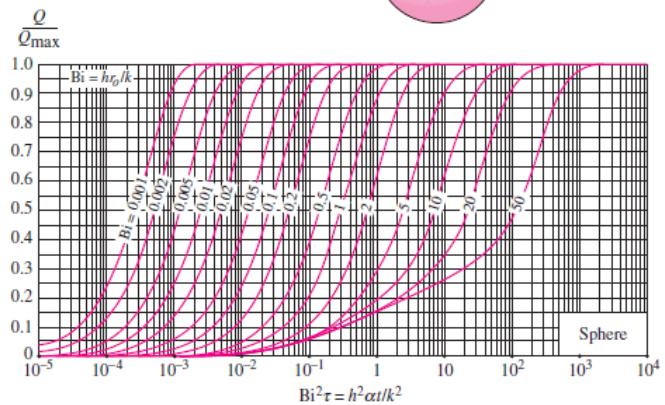
Figura 2 – Cilindro infinito de raio R , inicialmente à temperatura uniforme T_i , submetido a arrefecimento convectivo (coeficiente h ; temperatura a infinito T_∞) na superfície. Gráficos da variação temporal da temperatura no centro do cilindro ($r=0$), do perfil radial de temperaturas, e do calor transferido desde o tempo inicial.



(a) Midpoint temperature (from M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating," *Trans. ASME* 69, 1947, pp. 227–36. Reprinted by permission of ASME International.)



(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating," *Trans. ASME* 69, 1947, pp. 227–36. Reprinted by permission of ASME International.)



(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

Figura 3 – Esfera de raio R , inicialmente à temperatura uniforme T_i , submetida a arrefecimento convectivo na superfície (coeficiente h ; temperatura a infinito T_∞). Gráficos da variação temporal da temperatura no centro da esfera ($r=0$), do perfil radial de temperaturas, e do calor transferido desde o tempo inicial.

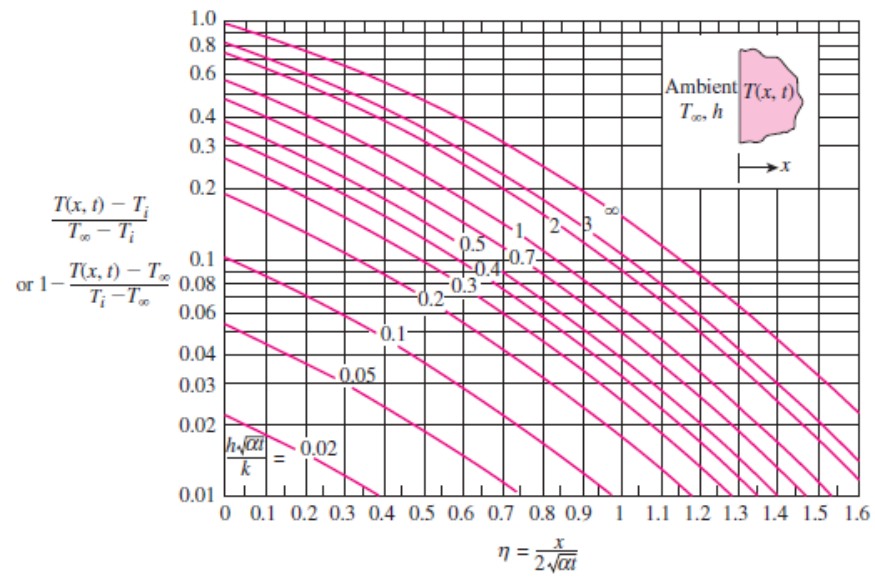


Figura 4 – Corpo semi-infinito na direcção x , inicialmente à temperatura uniforme T_i , submetido a arrefecimento convectivo na superfície (coeficiente h ; temperatura a infinito T_∞). Gráfico da variação temporal e espacial da temperatura.

Capítulo 5 – Condução em regime variável

5.8 Exercícios:

- 1) Calcular o tempo de resposta de um termopar (definido como o ponto em que se atinge 99% da variação total de temperatura). O termopar é esférico e é feito dum metal com $k = 35 \text{ W/(m K)}$, $\rho = 8500 \text{ kg/m}^3$ e $c_p = 320 \text{ J/(kg K)}$. O coeficiente de transmissão de calor (convecção mais radiação) é $h = 65 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$.
- 2) Esferas de 5 cm de diâmetro, feitas de bronze ($k = 111 \text{ W/(m K)}$, $\rho = 8522 \text{ kg/m}^3$ e $c_p = 0.385 \text{ KJ/(kg K)}$), estão inicialmente a $120 \text{ }^\circ\text{C}$, sendo de seguida temperadas em água a $50 \text{ }^\circ\text{C}$ durante 2 minutos. O coeficiente convectivo é $h = 240 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$. Para um tratamento de 100 esferas por minuto, calcular: a) A temperatura final das esferas; b) A potência calorífica retirada da água para a manter à temperatura constante de $50 \text{ }^\circ\text{C}$.
- 3) Repetir o exercício anterior para esferas de alumínio ($k = 237 \text{ W/(m K)}$, $\rho = 2702 \text{ kg/m}^3$ e $c_p = 0.903 \text{ kJ/(kg K)}$).
- 4) Estimar o tempo necessário para aquecer leite, de 3°C até 38°C . O leite está contido num copo cilíndrico (diâmetro 6 cm; altura 7 cm) de paredes finas, que é mergulhado em água quente a $60 \text{ }^\circ\text{C}$. O coeficiente convectivo entre as paredes exteriores do copo e a água quente é $h = 120 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$. Assume-se para o leite propriedades semelhantes às da água ($k = 0.613 \text{ W/(m K)}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $c_p = 4.18 \text{ kJ/(kg K)}$) e considera-se ainda que o leite está constantemente a ser misturado. Verificar ainda se a análise uniforme é válida.
- 5) Refazer o exercício anterior assumindo agora que a água quente está também a ser agitada de forma a que o coeficiente convectivo passe para o dobro.
- 6) Uma lata de refrigerante (335 ml, altura x diâmetro = 12.5 cm x 6.5 cm; propriedades físicas idênticas às da água) está à temperatura ambiente, $25 \text{ }^\circ\text{C}$. Uma pessoa pretende arrefecer o refrigerante agitando continuamente a lata dentro dum recipiente térmico contendo água e gelo (a $0 \text{ }^\circ\text{C}$). Calcular o tempo necessário para que a temperatura da bebida fique a $8 \text{ }^\circ\text{C}$. Comentar sobre adequação da análise uniforme.
- 7) Calcular o tempo de aquecimento (de 22°C até $140 \text{ }^\circ\text{C}$) da placa de um ferro de engomar, quando a temperatura do ar exterior é $22 \text{ }^\circ\text{C}$ e o coeficiente de transmissão calor $h = 12 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$. O ferro consome uma potência eléctrica de 1 kW e o rendimento de aquecimento é 85 %. A base é uma placa com área 0.03 m^2 e espessura 0.5 cm, sendo feita de liga de alumínio ($\alpha = 7.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $\rho = 2770 \text{ kg/m}^3$ e $c_p = 875 \text{ J/(kg K)}$).
- 8) Aquecimento de um ovo considerado como uma esfera de diâmetro 5.5 cm e propriedades idênticas às da água ($k = 0.6 \text{ W/(m K)}$, $\alpha = 0.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$). O ovo está inicialmente a uma temperatura uniforme de $8 \text{ }^\circ\text{C}$ e é mergulhado em água a ferver, a $97 \text{ }^\circ\text{C}$ ($h = 1400 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$). Calcular o tempo necessário para que a temperatura no cento do ovo atinja $70 \text{ }^\circ\text{C}$.
- 9) Um veio comprido (diâmetro 35 cm) de aço inox ($k = 14.9 \text{ W/(m K)}$, $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$ e $c_p = 477 \text{ J/(kg K)}$, $\alpha = 3.95 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) sai do forno a uma temperatura uniforme de $400 \text{ }^\circ\text{C}$ e é arrefecido suavemente numa câmara a $150 \text{ }^\circ\text{C}$, com coeficiente convectivo $60 \text{ W/m}^2 \text{ K}$. Calcular a temperatura no eixo ao fim de 20 minutos e o calor transferido por metro de comprimento do veio.

- 10) Arrefecimento de costeletas de porco, consideradas como placas com 2 cm de espessura ($k = 0.45 \text{ W/(m K)}$, $\alpha = 0.91 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$). As costeletas estão de início a 25°C e são colocadas numa câmara frigorífica mantida a -10°C , onde o coeficiente convectivo é $9 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$. Estimar o tempo para que as duas superfícies da costeleta fiquem a 3°C .
- 11) Um cilindro de alumínio com 5 cm de diâmetro e 10 cm de altura está inicialmente a 200°C e é arrefecido num meio exterior a 70°C com coeficiente convectivo $525 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$. Propriedades do alumínio: $k = 215 \text{ W/(m K)}$, $\alpha = 8.4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Calcular a temperatura num ponto interior do cilindro, a 1.25 cm do eixo e 6.25 mm duma base, ao fim de 1 minuto.
- 12) Calcular a distância da superfície do solo a que deve ser enterrado um cano de água para evitar congelamento durante 3 meses de inverno, quando a temperatura do solo no início do inverno é 15°C e a temperatura à superfície durante o inverno é -10°C . Propriedades do solo: $k = 0.4 \text{ W/(m K)}$, $\alpha = 0.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Cap. 6 – Convecção Natural

6.1 Introdução

Na transmissão de calor, convecção natural refere-se à transferência de energia térmica entre uma superfície (normalmente sólida) e um fluido (gás ou líquido) circundante, em que o movimento deste resulta unicamente de variações da sua massa volúmica causadas por variações de temperatura. Considerando por exemplo uma parede vertical aquecida, exposta ao ar atmosférico (sem vento), uma determinada e bem definida porção de ar, que entre em contacto directo com a parede, será inicialmente aquecida por condução. A temperatura dessa porção de ar torna-se superior à temperatura média do ar longe da parede e, por consequência, a sua massa volúmica diminui relativamente à do ar atmosférico (recorde-se que, para um gás perfeito, $\rho = p / (RT)$). Dessa forma, ficando mais leve, esse pequeno volume de ar terá tendência a subir (força de impulsão igual a $(\rho_{atm} - \rho_{ar\ quente})gV$) gerando-se assim um movimento do ar, ou seja uma corrente de convecção natural ascendente. Por continuidade (conservação da massa) o ar longe da parede irá descer, fechando o circuito.

Números adimensionais relevantes:

Número de Grashof:
$$Gr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$$

Número de Rayleigh:
$$Ra = GrPr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu \alpha}$$

Número de Prandtl
$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu / \rho}{k / \rho c_p} = \frac{\mu c_p}{k}$$

O que se pretende é obter o coeficiente de transferência de calor, que aparece também como um número adimensional (a variável dependente):

Número de Nusselt:
$$Nu = \frac{hL}{k}$$

As diversas grandezas dimensionais contidas nestes parâmetros são:

$\Delta T = T_Q - T_F$ [K]: diferença de temperaturas característica (quente menos fria);

L [m]: dimensão característica (por exemplo, comprimento duma placa ao longo do movimento);

g [m/s²]: aceleração da gravidade (valor típico na Terra: 9.8 m/s²);

β [1/K]: coeficiente de expansão térmica a pressão constante do fluido;

$\nu = \mu / \rho$ [m²/s]: viscosidade cinemática do fluido;

$\alpha = k / (\rho c_p)$ [m²/s]: difusividade térmica do fluido;

O coeficiente de expansão térmica é definido como o aumento relativo de volume que resulta de um aumento de temperatura unitário (mantendo-se a pressão constante):

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Como $\rho = m/V$ e a massa m conserva-se, tem-se

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

Na análise de convecção natural, esta expressão é usualmente aproximada como

$$\beta \cong -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\rho - \rho_0}{T - T_0} \right)$$

permitindo calcular variações de ρ em torno de um valor de referência ρ_0

$$\rho - \rho_0 = -\beta \rho_0 (T - T_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \rho_0 (1 - \beta (T - T_0))}$$

Verifica-se desta expressão que, quando a temperatura aumenta, a massa volúmica diminui; se $T = T_0$, então $\rho = \rho_0$ (os valores de referência, que podem ser considerados como aqueles existentes longe da superfície que está a aquecer, ou arrefecer, o fluido). Os valores de β para os líquidos são dados nas tabelas, e para os gases (como o ar) é fácil demonstrar, a partir da lei dos gases perfeitos, que $\beta = 1/T$ (T em kelvin).

Uma pequena porção de fluido, com volume V , ligeiramente aquecido relativamente ao fluido circundante (cujas propriedades serão indicadas com índice ∞), está submetida a uma força ascensional (para cima) igual à impulsão menos o peso (P). A impulsão vem do princípio de Arquimedes (que aliás se obtém directamente das equações da mecânica dos fluidos), que diz: um corpo submerso num líquido fica sujeito a uma força ascendente igual ao peso do volume de líquido deslocado. Desta forma, a força de impulsão “net” aplicada à porção de fluido V é dada por:

$$F_{\text{impulsão net}} = F_{\text{Arquimedes}} - P = P_{\text{deslocado}} - P = \rho_{\infty} g V - mg = (\rho_{\infty} - \rho) g V$$

A impulsão (referindo-se, a partir de agora, ao seu valor “net”) é a “força motriz” dos movimentos de convecção natural no seio dum fluido. Quando a porção de fluido está quente, tem-se $\rho < \rho_{\infty}$ e a força é para cima; quando está frio, a força de impulsão empurra o fluido para baixo. Com a aproximação anterior, podemos escrever:

$$\boxed{F_{\text{impulsão net}} = \rho_{\infty} g \beta (T - T_{\infty}) V}$$

em que se assume direcção positiva para cima.

A convecção natural é importante em fenómenos da natureza (causa o movimento dos mares, as correntes oceânicas, os movimentos da atmosfera, quando vistos em grande escala, etc.), da vida (arrefecimento de um corpo vivo – por exemplo, o corpo humano – mesmo na ausência de vento), e de engenharia (efeito de chaminé – fumos quentes a saírem verticalmente para a atmosfera; arrefecimento de componentes electrónicas em computadores, televisões, rádios, etc; arrefecimento em condensadores – por exemplo, atrás de frigoríficos). Só existe convecção natural se houver gravidade (se $g = 0$ a impulsão é nula).

As velocidades que ocorrem em escoamentos de convecção natural são pequenas, muito inferiores às velocidades usuais em escoamentos de convecção forçada (quando existe um ventilador ou uma bomba a mover o fluido). De facto, não é possível atribuir à partida um valor típico para a escala da velocidade num escoamento de convecção natural. Por isso usa-se uma escala difusiva, relacionada com a viscosidade: se uma dimensão típica for L [m], um tempo difusivo (relacionado com difusão da quantidade

de movimento por efeitos viscosos) é $t_{dif} = L^2 / \nu$ [s], logo uma escala de velocidade, de $e = Vt$, será $u_{dif} = \nu / L$ [m/s]. Desta forma, o número de Grashof, essencial nos problemas de convecção natural (em lugar do número de Reynolds da convecção forçada), pode ser interpretado fisicamente como:

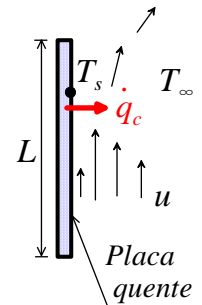
$$\text{Número de Grashof: } Gr = \frac{\text{Força Impulsão}}{\text{Forças Viscosas}} = \frac{\rho g \beta \Delta T V}{\mu \frac{u_{dif}}{L} A} = \frac{\rho g \beta \Delta T L^3}{\mu \frac{(\nu / L)}{L} L^2} = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$$

Quanto maior for o número de Grashof, maior o efeito das forças de impulsão que geram a convecção natural, relativamente às forças de viscosidade que tendem a opor-se ao movimento.

6.2 Escoamentos exteriores (camada limite)

Placa plana (geral): $Nu = C(GrPr)^n$

($n = \frac{1}{4}$ laminar, $Ra < 10^9$; $n = \frac{1}{3}$ turbulento, $Ra > 10^9$)



Convecção natural sobre **placa isotérmica vertical**:

Fluido	Regime	Nusselt	Gama Ra	Gama Pr
Gás ou líquido	Estagnado	$Nu = 1$	$< 10^4$	-
	Laminar	$Nu = 0.59 Ra^{1/4}$	$10^4 - 10^9$	-
	Turbulento	$Nu = 0.10 Ra^{1/3}$	$10^9 - 10^{13}$	-
	Geral	$Nu = \left\{ 0.825 + \frac{0.387 Ra^{1/6}}{\left[1 + (0.492 / Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$	$10^{-1} - 10^{13}$	-
	Laminar, mais precisa	$Nu = 0.68 + \frac{0.670 Ra^{1/4}}{\left[1 + (0.492 / Pr)^{9/16} \right]^{4/9}}$	$10^{-1} - 10^9$	-

(dimensão característica $L = H$ altura da placa; propriedades a $T_f = 0.5(T_s + T_\infty)$)

Convecção natural sobre **placa isotérmica inclinada**:

Fórmula idêntica à anterior, com $g \rightarrow g \cos \theta$, ângulo com a vertical θ ($\theta \leq 60^\circ$), e $Ra \leq 10^9$.

Convecção natural sobre **placa isotérmica horizontal**:

Configuração	Regime	Nusselt	Gama Ra	Gama Pr
Placa horizontal aquecida virada para cima (ou arrefecida, para baixo)	Estagnado	$Nu = 1$	$< 10^4$	-
	Laminar	$Nu = 0.54 Ra^{1/4}$	$10^4 - 10^7$	-
	Turbulento	$Nu = 0.15 Ra^{1/3}$	$10^7 - 10^{11}$	-
Placa horizontal aquecida virada para baixo (ou arrefecida, para cima)	Laminar	$Nu = 0.27 Ra^{1/4}$	$10^5 - 10^{11}$	-

(dimensão característica $L = A / P$, A -área, P -perímetro; propriedades a $T_f = 0.5(T_s + T_\infty)$)

Convecção natural sobre **cilindro horizontal**:

$$Nu = \left\{ 0.60 + \frac{0.387 Ra^{1/6}}{\left[1 + (0.559 / Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 \quad 10^{-5} \leq Ra \leq 10^{12}$$

(dimensão característica $L = D$; propriedades a T_f)

Convecção natural sobre **cilindro vertical**:

Mesmas fórmulas que placa plana vertical, desde que $D \geq 35H / Gr^{1/4}$.
A dimensão característica é a altura do cilindro, $L = H$.

Convecção natural sobre **esfera**:

$$Nu = 2 + \frac{0.589 Ra^{1/4}}{\left[1 + (0.469 / Pr)^{9/16} \right]^{4/9}} \quad Ra \leq 10^{11}; Pr \geq 0.7$$

(dimensão característica $L = \frac{1}{2} \pi D$; propriedades a T_f)

Fórmulas aproximadas para ar ($p_{atm} = 1 \text{ atm}$) com:

$h = C(\Delta T / L)^{1/4}$ (laminar) ou $h = C'(\Delta T)^{1/3}$ (turbulento)

Geometria	L	C	Gr	C'	Gr
		laminar		turbulento	
Placa ou cilindro vertical	H	1.42	10^4 - 10^9	1.31	10^9 - 10^{13}
Cilindro horizontal	D	1.32	10^4 - 10^9	1.24	10^9 - 10^{12}
Placa horizontal, face aquecida para cima	4A/P	1.32	10^4 - 10^7	1.52	10^7 - 10^{10}
Placa horizontal, face aquecida para baixo	4A/P	0.59	10^5 - 10^{10}	-	-
Esfera	D	1.92		-	-
Pequenos componentes, arames	H	3.53		-	-
Placa vertical com componentes integrados	H	2.44		-	-

Nota: para outras pressões: $h \times (p / p_{atm})^{1/2}$ (laminar); $h \times (p / p_{atm})^{2/3}$ (turbulento).

6.3 Escoamentos interiores em recintos fechados

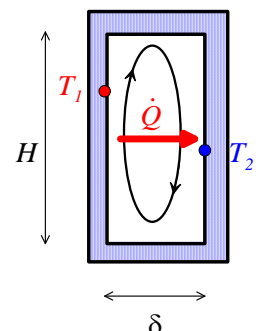
Em geral, tem-se:

$$Nu = \frac{h\delta}{k} \Rightarrow h = \frac{k}{\delta} Nu$$

em que δ é a separação entre as superfícies aquecidas 1 e 2, e a diferença de temperaturas característica é $\Delta T = T_1 - T_2$. A taxa de transferência de calor obtém-se de:

$$\dot{Q} = hA(T_1 - T_2) = \underbrace{(k \times Nu)}_{k_{ef}} \times A \frac{T_1 - T_2}{\delta} \quad (\text{W})$$

em que $k \times Nu$ pode ser visto como uma condutibilidade térmica efectiva da cavidade. A área superficial efectiva de troca de calor A depende da



geometria. Num recinto paralelipédico, será a área da secção transversal rectangular entre as superfícies 1 e 2, dada por altura (H) vezes comprimento (ou profundidade W) do recinto.

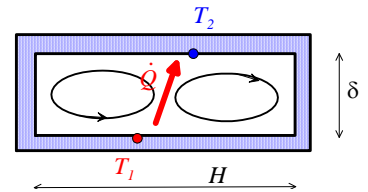
Recinto rectangular vertical ($\delta \times H$)

Fluido	Regime	Nusselt	Gama Ra	Gama Pr	Gama H/δ
Gás ou líquido	Estagnado	1	$< 2 \times 10^3$	-	
Gás	Laminar	$Nu = 0.197 Ra^{1/4} \left(\frac{H}{\delta} \right)^{-1/9}$	$2 \times 10^3 - 2 \times 10^5$	0.5 – 2	11 – 42
	Turbulento	$Nu = 0.073 Ra^{1/3} \left(\frac{H}{\delta} \right)^{-1/9}$	$2 \times 10^5 - 2 \times 10^7$	0.5 – 2	11 – 42
Líquido	Laminar	$Nu = 0.42 Ra^{1/4} Pr^{0.012} \left(\frac{H}{\delta} \right)^{-0.3}$	$10^4 - 10^7$	$1 - 2 \times 10^4$	10 – 40
	Turbulento	$Nu = 0.046 Ra^{1/3}$	$10^6 - 10^9$	1 – 20	1 – 40

(dimensão: $L = \delta$, largura; propriedades a $T_m = 0.5(T_1 + T_2)$)

Recinto rectangular inclinado de θ ($\delta \times H$)

Mesmas fórmulas com $g \rightarrow g \cos \theta$ no cálculo de Ra , desde que $\theta \leq 20^\circ$.



Recinto rectangular horizontal ($H \times \delta$)

Fluido	Regime	Nusselt	Gama Ra	Gama Pr
Gás ou líquido	Aquecido em cima	1	-	-
	Aquecido em baixo:			
Gás ou líquido	Estagnado	1	$< 1.7 \times 10^3$	-
Gás	Sub-laminar	$Nu = 0.059 Ra^{0.4}$	$1.7 \times 10^3 - 7 \times 10^3$	0.5 – 2
	Laminar	$Nu = 0.212 Ra^{1/4}$	$7 \times 10^3 - 3.2 \times 10^5$	0.5 – 2
	Turbulento	$Nu = 0.061 Ra^{1/3}$	$> 3.2 \times 10^5$	0.5 – 2
Líquido	Sub-laminar	$Nu = 0.012 Ra^{0.6}$	$1.7 \times 10^3 - 6 \times 10^3$	1 – 5000
	Laminar	$Nu = 0.375 Ra^{0.2}$	$6 \times 10^3 - 3.7 \times 10^4$	1 – 5000
	Transição	$Nu = 0.130 Ra^{0.3}$	$3.7 \times 10^4 - 10^8$	1 – 20
	Turbulento	$Nu = 0.057 Ra^{1/3}$	$> 10^8$	1 – 20

(dimensão: $L = \delta$, largura; propriedades a $T_m = 0.5(T_1 + T_2)$)

Cilindros horizontais concêntricos ($l \times \delta$)

Fluido	Regime	Nusselt	Gama Ra	Gama Pr
Gás ou líquido	Laminar	$Nu = 0.11 Ra^{0.29}$	$6.3 \times 10^3 - 10^6$	1 – 5000
Gás ou líquido	Turbulento	$Nu = 0.40 Ra^{0.20}$	$10^6 - 10^8$	1 – 5000

(dimensão: $L = \delta = R_2 - R_1$, espaçamento entre cilindros; área de troca de calor $A = 2\pi l(R_2 - R_1) / \ln(R_2 / R_1)$; propriedades a $T_m = 0.5(T_1 + T_2)$).

Esferas concêntricas ($\delta = R_2 - R_1$)

Fluido	Regime	Nusselt	Gama Ra	Gama Pr
Gás ou líquido	Laminar	$Nu = 0.228Ra^{0.226}$	$10^2 - 10^9$	$0.7 - 4000$

(dimensão: $L = \delta = R_2 - R_1$, espaçamento entre esferas; área de troca de calor $A = 4\pi R_1 R_2$; propriedades a $T_m = 0.5(T_1 + T_2)$)

6.4 Convecção natural em alhetas

Para facilitar o arrefecimento de componentes electrónicos é usual aplicar-se sobre o substrato desses componentes um dispositivo constituído por um conjunto de alhetas lamelares fixadas numa base metálica. O arranjo mais comum é de alhetas rectangulares, de altura L , comprimento H e espessura e , espaçadas numa distância S , e aplicadas numa base de área $L \times W$. O número total de alhetas é $n = W / (S + e) \approx W / S$. A quantidade de calor dissipada por unidade de tempo, pelo conjunto das n alhetas, é

$$\dot{Q} = hA\Delta T = h(n2LH)(T_s - T_\infty)$$

em que T_s é a temperatura da superfície e T_∞ a temperatura do ar ambiente longe do módulo com alhetas. O factor 2 surge porque cada alheta rectangular transfere calor pelas duas faces. Para aumentar a taxa de calor transferido, aumenta-se o número de alhetas aplicadas numa base de largura especificada W , o que equivale a diminuir o espaçamento entre alhetas S . No entanto, quando o espaçamento é demasiado pequeno, o movimento do ar por convecção natural entre alhetas torna-se mais difícil, resultando em velocidades de ar mais baixas e consequente redução do coeficiente convectivo h . Este argumento mostra que deverá existir um valor óptimo do espaçamento entre alhetas, que se demonstra ser:

$$S_{opt} = 2.714L / Ra^{1/4}$$

com o número de Rayleigh baseado na altura (segundo a vertical) das alhetas L . Para esse espaçamento óptimo, o coeficiente convectivo é dado por:

$$h_{opt} = 1.31k / S_{opt}$$

em que k é a condutibilidade térmica do ar (propriedades calculadas à temperatura média $0.5(T_s + T_\infty)$).

6.5 Exemplos ilustrativos

Exemplo 1- Calcular o coeficiente de transmissão de calor e o calor transferido de uma parede com 4 m de altura e 10 m de largura, cuja temperatura é 60 °C, exposta a ar atmosférico (pressão = 1 atm) a 10 °C.

A temperatura média, ou temperatura de filme, é

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{60 + 10}{2} = 35^\circ\text{C} = 308 \text{ K}.$$

Para esta temperatura, obtêm-se das tabelas as propriedades relevantes do ar:

$$\nu = 1.655 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}; \quad Pr = 0.7268; \quad k = 0.02625 \text{ W}/(\text{m K});$$

$$\beta = 1/T = 3.247 \times 10^{-3} \text{ 1/K}$$

A dimensão característica é a altura da parede, $L = 4$ m, e a diferença de temperaturas característica é $\Delta T = 50$ °C. O número de Grashof é dado por:

$$Gr = \frac{9.8 \times 3.247 \times 10^{-3} \times 50 \times 4^3}{(1.655 \times 10^{-5})^2} = 3.717 \times 10^{11}$$

e o número de Rayleigh

$$Ra = Gr \times Pr = 3.717 \times 10^{11} \times 0.7268 = 2.702 \times 10^{11}.$$

Como Ra é superior a 10^9 , trata-se de convecção natural turbulenta numa placa plana vertical. Usando primeiramente a correlação mais simples, obtém-se:

$$Nu = 0.10 Ra^{1/3} = 0.10 \times (2.702 \times 10^{11})^{1/3} = 646.5$$

pelo que o coeficiente convectivo vem:

$$Nu = \frac{hL}{k} \Rightarrow h = \frac{Nuk}{L} = \frac{646.5 \times 0.02625}{4} = 4.24 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$$

Repare-se que se trata de um valor baixo e que, para convecção turbulenta, o valor de h não depende da dimensão L . Nas aplicações práticas usam-se tipicamente valores da ordem dos $10 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$, o que se justifica porque, ao coeficiente convectivo, se deve somar um coeficiente radiativo. Para convecção natural simples, a taxa de calor é:

$$\dot{Q} = hA(T_s - T_\infty) = 4.24 \times (4 \times 10) \times 50 = 8480 \text{ W} \approx 8.5 \text{ kW}.$$

Vamos refazer o cálculo usando a correlação mais complexa para o Nusselt,

$$Nu = \left\{ 0.825 + \frac{0.387 Ra^{1/6}}{\left[1 + (0.492 / Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 \\ = \left\{ 0.825 + \frac{0.387 \times (2.702 \times 10^{11})^{1/6}}{\left[1 + (0.492 / 0.7268)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 = 726.6$$

Logo

$$h = \frac{Nuk}{L} = \frac{726.6 \times 0.02625}{4} = 4.77 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \quad (\text{cerca de 12\% superior})$$

e

$$\dot{Q} = hA(T_s - T_\infty) = 4.77 \times (4 \times 10) \times 50 = 9536 \text{ W} \approx 9.5 \text{ kW}.$$

Verifica-se que podem ocorrer variações da ordem dos 10% nos coeficientes h calculados através de correlações diferentes, sobretudo quando os valores destes coeficientes convectivos são pequenos.

Exemplo 2 – Calcular a taxa de transferência de calor num espaço vertical repleto de ar, entre duas placas quadradas de 0.5 m de lado, separadas por 15 mm, estando uma das placas a 100 °C e a outra a 40 °C.

As propriedades físicas do ar são obtidas das tabelas para a temperatura média $T_m = 0.5(T_1 + T_2) = 0.5 \times (100 + 40) = 70$ °C = 343 K:

$$\nu = 1.995 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}; \quad Pr = 0.7177; \quad k = 0.02881 \text{ W/(m K)}; \\ \beta = 1/T = 1/343 = 2.915 \times 10^{-3} \text{ 1/K}$$

O número de Grashof para o espaço paralelepípedo vertical, baseado na sua espessura e para uma diferença de temperaturas de $\Delta T = (T_1 - T_2) = 60$ °C, é

$$Gr = \frac{9.8 \times 2.915 \times 10^{-3} \times 60 \times 0.015^3}{(1.995 \times 10^{-5})^2} = 1.454 \times 10^4$$

e o número de Rayleigh

$$Ra = Gr \times Pr = 1.454 \times 10^4 \times 0.7177 = 1.043 \times 10^4 .$$

Para ar, esta magnitude de Ra corresponde a convecção natural laminar, com o número de Nusselt dado pela expressão

$$Nu = 0.197 Ra^{1/4} (H / \delta)^{-1/9} = 1.348$$

em que $H / \delta = 50 / 1.5 = 33.33$ é a relação altura/espessura da cavidade. Como Nu pode ser interpretado como uma condutibilidade térmica efectiva a dividir pela condutibilidade real, temos que a transferência de calor na cavidade se faz a uma taxa 34.8% superior a que ocorreria por condução pura. A taxa de calor é dada por:

$$\dot{Q} = kNuA \frac{(T_1 - T_2)}{\delta} = 0.02881 \times 1.348 \times 0.5^2 \times \frac{60}{0.015} = 38.9 \text{ W}.$$

Verifica-se que a transferência de calor é pequena, e portanto o espaço fechado de ar actua como um isolamento efectivo. Se não houvesse convecção natural nesse espaço, o efeito de isolamento térmico seria ainda maior.

6.6 Anexo Avançado 1 – Equações para convecção natural em placa plana vertical

Considera-se uma parede quente vertical, com temperatura do fluido longe da parede igual a T_∞ . Usando coordenadas cartesianas (velocidade $\mathbf{u} = (u, v)$), em que x está alinhado com a superfície da parede e tem sentido ascendente, e y é normal à parede, as equações da continuidade, do movimento e da energia escrevem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

Não se considera o termo de dissipação viscosa na equação da energia porque, em convecção natural, as velocidades são baixas.

Introduzindo a aproximação de camada limite segundo x (v pequeno relativamente a u , e variações segundo x desprezáveis, $\partial/\partial x = 0$), obtêm-se as equações simplificadas (para camada limite):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \text{com } \frac{\partial p}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

O movimento é produzido pelo peso dum elemento de fluido, representado pelo termo $-\rho g$ na equação de u , quando a massa volúmica variar de ponto para ponto. Para simplificar as equações, considera-se ρ como variável somente nesse termo, assumindo-se como constante nos termos convectivos e na equação da continuidade. A definição do coeficiente de expansão no texto principal, permite escrever $\rho = \rho_\infty - \beta \rho_\infty (T - T_\infty)$, ou seja:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_\infty g + \beta \rho_\infty g (T - T_\infty) = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \beta \rho_\infty g (T - T_\infty)$$

em que $p' = p + \rho_\infty g x$ é uma pressão modificada (pressão menos pressão hidroestática).

As equações ficam:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p'}{\partial x} + g\beta(T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

com $\alpha = k/(\rho_\infty c_p)$, $\nu = \mu/\rho_\infty$ e as propriedades de referência baseadas em T_∞ .

Introduzindo variáveis adimensionais, $u \equiv u/U_0$, $v \equiv v/U_0$, $p \equiv p'/\rho U_0^2$, $\theta \equiv (T - T_\infty)/\Delta T$, $x \equiv x/L$, $y \equiv y/L$, em que U_0 é uma escala de velocidade, $\Delta T = T_0 - T_\infty$ uma variação típica de temperatura, e L um comprimento característico, as equações ficam:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Gr}{Re^2} \theta + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

em que surgem os seguintes grupos adimensionais:

$$Re = \frac{\rho_\infty U_0 L}{\mu} \text{ (número de Reynolds)}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k} \text{ (número de Prandtl)}$$

$$\frac{g\beta L \Delta T}{U_0^2} = \frac{g\beta L^3 \Delta T}{\nu^2} \frac{\nu^2}{L^2 U_0^2} = \frac{Gr}{Re^2}, \text{ com } Gr = \frac{g\beta \Delta T L^3}{\nu^2} \text{ (número de Grashof)}.$$

Verifica-se que a equação da quantidade de movimento depende do número de Grashof e do número de Reynolds, e que a equação da energia depende do produto do número de Reynolds pelo número de Prandtl (este produto é por vezes designado número de Peclet, $Pe = Re \times Pr$). A importância do termo de impulsão na equação da quantidade de movimento é proporcional ao grupo Gr/Re^2 ; quando é pequeno, $Gr/Re^2 \leq 0.1$ a convecção forçada predomina; quando $Gr/Re^2 \geq 0.1$ é a convecção natural que predomina.

Capítulo 6 – Convecção natural

6.7 Exercícios:

- 1) Um cano de água quente (diâmetro 6 cm, comprimento 8 m) atravessa horizontalmente uma sala a 22 °C. Se a temperatura da superfície do cano for 65 °C e a emissividade do material 0.8, calcular a taxa de calor perdido por: a) convecção; b) radiação. Resp: 382 W e 295 W.
- 2) Uma placa quadrada de 0.8 x 0.8 m a 60 °C está emergida em ar ambiente a 20 °C. Considerando que uma das faces da placa está isolada, calcular a taxa de calor transferido pela outra face se a orientação for: a) vertical; b) horizontal para cima; c) horizontal para baixo. Resp: 101.5 W, 124.5 W, 55.0 W.
- 3) Um transistor de potência (180 mW), de forma cilíndrica (4 mm diâmetro; 4.5 mm comprimento) está montado horizontalmente numa parede, com ar ambiente a 35 °C. A emissividade da superfície do transistor é 0.1 e as paredes da sala estão a 25 °C. Calcular a temperatura superficial do transistor. Resp: 183 °C.
- 4) Uma panela cilíndrica com 25 cm diâmetro contém água a ferver (100 °C) até uma altura de 12 cm. Considerando que a superfície exterior lateral da panela está a 98 °C e tem emissividade 0.95, e que a temperatura ambiente é 25 °C, calcular a potência calorífica perdida pela superfície lateral por: a) convecção; b) radiação. Obter ainda a percentagem do calor perdido por condução pelas paredes da panela em relação ao calor perdido por evaporação, sabendo que se evaporam 2 kg de vapor por hora. Resp: 46.6 W, 56.1 W, 8.5 %.
- 5) Calcular os coeficientes convectivos exterior e interior numa lata de refrigerante a 3 °C quando a temperatura do ar exterior é 25 °C. Dimensões da lata: 6 cm diâmetro x 12.5 cm altura. Líquido com propriedades semelhantes à água. Resp: 5.5 W/m² °C.
- 6) Um colector solar plano está colocado horizontalmente num telhado. O colector tem dimensões 1.5 m x 6 m e as temperaturas da sua superfície e do ar ambiente são 42 °C e 15 °C. Calcular o calor perdido por convecção e radiação. Resp: 1297 e 2920 W.
- 7) Calcular a temperatura superficial de um circuito electrónico impresso (PCB) que dissipa uma potência de 8 W. O ar ambiente está a 20 °C e o circuito está implementado numa placa com 15x20 cm, com emissividade 0.8. Considerar arranjo vertical, horizontal para cima e para baixo. Resp: 46.0 °C, 41.6 °C, 51.0 °C.
- 8) Uma janela de vidro duplo com dimensões 1.2x2 m e espessura entre vidros 2.5 cm, tem temperaturas interiores de cada vidro 18 °C e 5 °C. A emissividade efectiva entre os vidros é 0.82. Calcular a taxa de calor transferida por: a) convecção natural; b) radiação; c) condutibilidade térmica efectiva. Resp: 49.2 W, 133.7 W, 0.146 W/m K.
- 9) Duas esferas com diâmetros 15 cm e 25 cm contêm ar a 1 atm. As temperaturas da cada casca esférica são 350 K e 275 K. Obter o calor transferido por convecção. Resp: 22.7 W.
- 10) Um painel solar com largura x altura igual a 2 x 3 m tem um espaço de ar com espessura 3 cm, estando isolado na superfície traseira. Considerando que as temperaturas do vidro e da superfície absorvedora são 32 °C e 80 °C, calcular o calor perdido por convecção quando o ângulo que o painel faz com a horizontal é 0°, 20° e 90°. Resp: 953 W, 938 W, 556 W.

- 11) Um colector solar artesanal é feito com uma mangueira preta, diâmetro 1.6 cm a 65 °C, e um plástico cilíndrico envolvente com diâmetro 5 cm. A temperatura do ar é 26 °C. Calcular o calor perdido pela água, por convecção natural e metro de mangueira, e a temperatura do plástico. Resp: 6.7 W, 35.5 °C.
- 12) Um dissipador de calor de alumínio tem uma superfície de 7.62 x 9.68 cm e dispõe de 6 alhetas rectangulares, com 1.52 cm de comprimento de 1.45 cm de espaçamento, havendo um espaçamento central de 3.17 cm onde um transistor de potência é colocado. A espessura da base da alheta é 0.48 cm. Sabendo que o transistor dissipa 15 W, quando a temperatura do ar é 22 °C e a temperatura da superfície do dissipador 120 °C, calcular o coeficiente convectivo de transmissão de calor. Resp: 7.13 W/m² K.
- 13) Uma superfície plana vertical tem largura x altura = 15.2 cm x 20 cm, e é arrefecida por ar atmosférico a 25 °C. Para aumentar a taxa de arrefecimento dispõe de alhetas rectangulares verticais com dimensões 0.2 x 3 x 20 cm. Calcular o espaçamento óptimo entre alhetas, a o calor dissipado quando a base está a 80 °C. Resp: 7.4 mm, 51.4 W.

Cap. 7 – Convecção Forçada

7.1 Introdução

Na convecção forçada o fluxo de calor \dot{q}_c entre uma parede aquecida à temperatura T_w e um fluido mais frio (temperatura média, longe da parede, T_∞) é determinado a partir da lei de Newton do arrefecimento:

$$\dot{q}_c = h(T_w - T_\infty) \quad [\text{W/m}^2]$$

O número de Nusselt é o parâmetro adimensional principal, fornecendo o coeficiente convectivo que permite calcular o calor transferido:

$$Nu = \frac{hL}{k}$$

com significado físico

$$Nu = \frac{\text{fluxo por convecção}}{\text{fluxo por condução pura}} = \frac{h\Delta T}{k\Delta T / L}$$

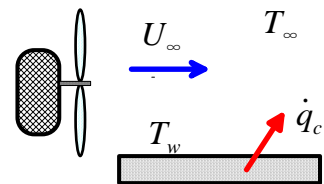
em que

h - coeficiente convectivo [$\text{W}/(\text{m}^2 \text{ K})$]

L - dimensão característica [m]

k - condutibilidade térmica do fluido [$\text{W}/(\text{m K})$]

ΔT - diferença de temperaturas, entre a parede e o fluido longe da parede [K]



O movimento do fluido em convecção forçada é gerado por uma fonte de energia externa (bomba, ventilador, etc) que permite definir uma escala de velocidade típica:

U_∞ - velocidade longe da parede [m/s]

Esta velocidade aparece num novo número adimensional, o número de Reynolds, importante em convecção forçada (e de facto em toda a mecânica de fluidos), definido como a razão entre as forças de inércia (convectivas) promotoras do movimento, e as forças de viscosidade que se opõem ao movimento:

$$Re = \frac{\text{forças de inércia}}{\text{forças de viscosidade}} = \frac{\rho U U}{\mu U / L} = \frac{\rho U L}{\mu} \quad \Rightarrow \quad Re = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}$$

O escoamento é laminar quando o número de Reynolds é inferior a um valor crítico, Re_{cr} , que depende da geometria, e transita para o regime turbulento quando Re é superior a esse valor crítico.

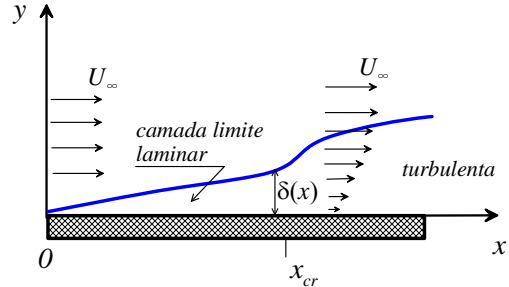
A viscosidade é definida através da lei de Newton para fluido viscoso, que relaciona a força por unidade de área (tensão, $\tau = F / A$) que uma camada de fluido exerce sobre a que lhe está adjacente, a uma distância Δy , quando a diferença de velocidades entre as duas é Δu :

$$\tau = \mu \frac{\Delta u}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

O coeficiente de viscosidade μ [Pa.s]=[kg/(m.s)] é constante (a uma determinada temperatura) para um fluido newtoniano (como o ar, ou a água). Mede a facilidade do deslizamento entre camadas de fluido quando são submetidas a uma determinada força de corte (tangencial). Se a temperatura aumentar, a viscosidade dos gases aumenta

(maior tendência para choques moleculares) e a viscosidade dos líquidos diminui (menor ligação entre moléculas).

Camada limite. Qualquer fluido usual adere a uma parede sólida que o contenha. Num escoamento sobre uma superfície sólida estacionária (imóvel), existe uma fina camada de fluido na qual as velocidades variam abruptamente, desde a velocidade imposta a infinito U_∞ pela força motriz que gera o movimento, até a velocidade nula na parede resultante da condição de não escorregamento ($u = 0$ para $y = 0$). Toma-se x como a distância segundo o movimento, a que corresponde uma componente de velocidade u , e y a distância normal à parede. Esta zona de elevados gradientes de velocidade $\partial u / \partial y$ designa-se como camada limite (conceito introduzido por Prandtl). O escoamento fora da camada limite é potencial (o fluido comporta-se como ideal, e a viscosidade é irrelevante); é somente dentro da camada limite que a viscosidade se torna importante. A espessura da camada limite δ é definida como a distância da parede para a qual a velocidade fica 1 % diferente da velocidade a infinito: $\delta = y$ para $u = 0.99U_\infty$. Por causa da condição de não escorregamento, o fluxo de calor convectivo é igual ao fluxo por condução calculado exactamente sobre a parede: $\dot{q}_c = \dot{q}_{cond,w} = -k(\partial T / \partial y)_w$.



Camada limite térmica. Quando a superfície sólida (parede) é aquecida (ou arrefecida relativamente à temperatura do fluido a infinito, longa da parede), existe uma camada limite de temperaturas semelhante à camada limite de velocidades. Nessa camada de fluido a temperatura varia muito rapidamente desde a temperatura imposta na parede até à temperatura do fluido não perturbado, longe da parede. A espessura dessa camada limite térmica é indicada por δ_t (y para $T - T_w = 0.99(T_\infty - T_w)$), e verifica-se que a razão entre as duas espessuras é função do número de Prandtl,

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\mu / \rho}{k / (\rho c_p)} = \frac{\nu}{\alpha}$$

em que

ρ - massa volúmica [kg/m^3]

c_p - capacidade térmica a pressão constante [J/kg K]

ν - viscosidade cinemática [m^2/s]

α - difusividade térmica [m^2/s]

Fisicamente o número de Prandtl representa

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{difusão da quantidade de movimento (velocidades)}}{\text{difusão do calor (temperatura)}}$$

Quando:

$Pr \gg 1$: o campo de velocidade desenvolve-se rapidamente (óleos viscosos);

$Pr \ll 1$: o campo de temperatura desenvolve-se rapidamente (metais líquidos);

$Pr \approx 1$: os campos de velocidade e temperatura desenvolvem-se simultaneamente (gases).

Valores típicos do número de Prandtl:

Fluido	Pr
Metais líquidos	0.004 – 0.03
Gases	0.7 – 1.0
Água	1.7 – 13.7
Fluidos orgânicos	5 – 50
Óleos	50 – 100 000
glicerina	2000 – 100 000

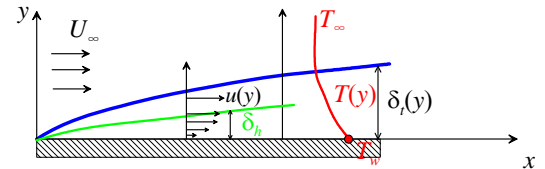
No caso de camada limite sobre placa plana, demonstra-se que:

$$Pr \cong \left(\frac{\delta}{\delta_t} \right)^3$$

7.2 Escoamentos exteriores (camada limite)

7.2.1 Placa plana de comprimento L (geral): $Nu = CRe^m Pr^n$ $Re_{cr} = 5 \times 10^5$

a. Convecção forçada sobre placa isotérmica (T_w)



Nusselt médios ($Nu = hL / k$; $Re = U_\infty L / \nu$):

$$Nu = 0.664 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad \text{laminar, } Re < 5 \times 10^5; Pr \geq 0.6$$

$$Nu = 0.037 Re^{4/5} Pr^{1/3} \quad \text{turbulento, } 5 \times 10^5 < Re < 10^7; 0.6 \leq Pr \leq 60$$

$$Nu = (0.037 Re^{4/5} - 871) Pr^{1/3} \quad \text{parte laminar, resto turbulento, } 5 \times 10^5 < Re$$

Nusselt locais ($Nu_x = h_x x / k$; $Re_x = U_\infty x / \nu$):

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad \text{laminar, } Re_x < 5 \times 10^5; Pr \geq 0.6 \text{ (Nota: } h = 2h_x \text{)}$$

$$Nu_x = 0.0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3} \quad \text{turbulento, } 5 \times 10^5 < Re_x < 10^7; 0.6 \leq Pr \leq 60$$

$$\text{(Nota: } h = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx = \frac{5}{4} h_x \text{)}$$

Coefficientes de atrito médios ($C_f = \tau_w / (\frac{1}{2} \rho U_\infty^2)$):

$$C_f = \frac{1.328}{Re^{1/2}} \quad \text{laminar, } Re < 5 \times 10^5; Pr \geq 0.6$$

$$C_f = \frac{0.074}{Re^{1/5}} \quad \text{turbulento, } 5 \times 10^5 < Re < 10^7; 0.6 \leq Pr \leq 60$$

$$C_f = 0.074 / Re^{1/5} - 1742 / Re \quad \text{parte laminar e restante parte turbulenta}$$

b. Convecção forçada sobre placa com fluxo de calor (\dot{q}_w) imposto:

$$Nu_x = 0.453 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad \text{laminar, } Re < 5 \times 10^5$$

$$Nu_x = 0.0308 Re_x^{0.8} Pr^{1/3} \quad \text{turbulento, } Re > 5 \times 10^5$$

No caso laminar, a diferença de temperaturas média entre a parede e o fluido é dada por:

$$\Delta T = \bar{T}_w - T_\infty = (\dot{q}_w L / k) / (0.6795 Re^{1/2} Pr^{1/3}) \Leftrightarrow Nu = 0.6795 Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

7.2.2 Convecção forçada sobre cilindro ($Re = U_\infty D / \nu$, D -diâmetro; $Re_{cr} = 2 \times 10^5$)

Nusselt médio ($Nu = hD / k$):

$$Nu = 0.3 + \frac{0.62 Re^{1/2} Pr^{1/3}}{\left(1 + (0.4 / Pr)^{2/3}\right)^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re}{28200}\right)^{5/8}\right]^{4/5} \quad Re Pr > 0.2$$

(Churchill e Bernstein; propriedades a $T_f = 0.5(T_\infty + T_w)$)

Coefficiente de resistência (“drag”) médio (cilindro: diâmetro - D ; comprimento - L):

$$C_D = 1.18 + \frac{6.8}{Re^{0.89}} + \frac{1.96}{Re^{0.5}} - \frac{0.0004 Re}{1 + 3.64 \times 10^{-7} Re^2} \quad 10^{-4} < Re < 2 \times 10^5$$

A força de resistência é: $F_D = C_D A_f \frac{1}{2} \rho U^2$ (área frontal do cilindro: $A_f = LD$).

7.2.3 Convecção forçada sobre esfera de diâmetro D ($Re = U_\infty D / \nu$)

Nusselt médio ($Nu = hD / k$):

$$Nu = 2 + \left(0.4 Re^{1/2} + 0.06 Re^{2/3}\right) Pr^{0.4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w}\right)^{1/4} \quad 3.5 < Re < 80\,000; 0.7 < Pr < 380$$

(Whitaker; propriedades a T_∞)

Coefficiente de resistência (“drag”) médio (F.A. Morrison)

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{2.6(Re/50)}{1 + (Re/50)^{1.52}} + \frac{0.411(Re/263\,000)^{-7.94}}{1 + (Re/263\,000)^{-8.00}} + \frac{Re^{0.80}}{461\,000} \quad 10^{-4} < Re < 10^6$$

A força de resistência é: $F_D = C_D A_f \frac{1}{2} \rho U^2$ (área frontal da esfera: $A_f = \pi D^2 / 4$).

7.2.4 Convecção forçada sobre corpos de várias formas ($Re = U_\infty L / \nu$)

Fórmulas aproximadas, com $Nu = hL / k = C Re^m Pr^{1/3}$; L - dimensão transversal

Geometria	Fluido	L	C	m	Validade Re
Cilindro circular	Gás ou líquido	D	0.989	0.330	0.4 – 4
			0.911	0.385	4 – 40
			0.683	0.466	40 – 4000
			0.193	0.618	4000 – 40 000
			0.027	0.805	40 000 – 400 000
Quadrado (lado a)	Gás	a	0.102	0.675	5000 – 100 000
Quadrado, 45°	Gás	$\sqrt{2}a$	0.246	0.588	5000 – 100 000
Hexágono (alinhado, a -lado)	Gás	$2a / \sqrt{3}$	0.153	0.638	5000 – 100 000
Hexágono, 45°	Gás	$2a$	0.160	0.638	5000 – 19 500
			0.0385	0.782	19 500 – 100 000
Placa vertical	Gás	H	0.228	0.731	4000 – 15 000
Elipse (alinhada b - eixo menor)	Gás	b	0.248	0.612	2500 – 15 000

(Propriedades a $T_f = 0.5(T_w + T_\infty)$)

7.3 Escoamentos interiores

Em escoamentos interiores a velocidade típica usada na definição do número de Reynolds é a **velocidade média** dentro da conduta, obtida por divisão do caudal volumétrico (\dot{V} [m³/s]) pela área da secção transversal (A [m²]):

$$U = \dot{V} / A \text{ [m/s]}$$

Para fluido com massa volúmica ρ [kg/m³], o **caudal mássico** numa conduta é dado por:

$$\dot{m} = \rho AU \text{ [kg/s]}$$

O escoamento no interior dum tubo circular de diâmetro $D = 2R$ ocorre no regime **laminar** (as partículas de fluido seguem linhas paralelas bem definidas) quando

$$Re = \rho U D / \mu < 2300 \text{ (laminar)}$$

e no regime **turbulento** (as linhas instantâneas de escoamento são irregulares e a velocidade local varia aleatoriamente ao longo do tempo) se

$$Re > 4000 \text{ (turbulento)}.$$

Entre estes dois valores de Re o escoamento está num regime de transição, entre laminar e turbulento:

$$2300 < Re < 4000 \text{ (transição)}.$$

Para um tubo redondo, de raio R e área transversal $A = \pi R^2$, o perfil de velocidades no regime laminar, em escoamento completamente desenvolvido (a velocidade já não depende da coordenada axial, ao longo do tubo) tem forma parabólica,

$$u = 2U \left[1 - (r/R)^2 \right]$$

com a velocidade máxima a ocorrer no eixo ($r = 0$), igual a:

$$U_0 = 2U$$

e velocidade média:

$$U = (-dp/dx) R^2 / 8\mu \quad \Rightarrow \quad U = \frac{\Delta p}{L} \frac{R^2}{8\mu}$$

em que $-dp/dx$ é o gradiente de pressão (constante) que faz mover o fluido.

O fluido que circula no interior de uma conduta pode, idealmente, ser aquecido por duas formas:

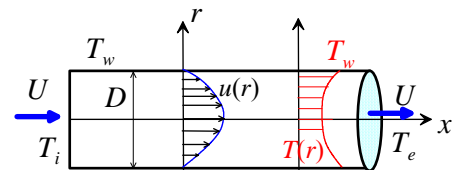
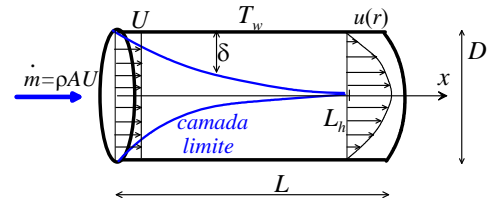
- a parede da conduta está quente, a uma temperatura constante, T_w ;
- um fluxo de calor constante é imposto na parede \dot{q}_w .

A **potência calorífica** recebida pelo fluido, entre a entrada e a saída da conduta, é dada por um balanço de energia (1ª Lei da Termodinâmica):

$$\dot{Q} = \dot{m} c_p (T_e - T_i) \text{ [W]}$$

em que a temperatura média do fluido à entrada é T_i , à saída é T_e , e c_p é a capacidade térmica específica do fluido a pressão constante. Esta potência calorífica transferida pode também ser obtida através de aplicação dos princípios de transmissão de calor, usando um coeficiente convectivo h (assumido como constante):

$$\dot{Q} = A_p h \Delta T \text{ [W]}$$



em que a área de permuta, A_p , é em geral dada por $A_p = \int P dx$ (P =perímetro molhado da conduta) e, no caso particular de um tubo redondo, $A_p = 2\pi RL$, com L -comprimento do tubo. Como a temperatura média do fluido vai aumentando ao longo do tubo, à medida que é aquecido, a diferença de temperaturas na expressão anterior (ΔT) tem de assumir um valor médio.

No caso de $T_w = Cte$, uma hipótese grosseira é utilizar a diferença entre a temperatura na parede e a temperatura global média do fluido ($T_m = 0.5(T_i + T_e)$), $\Delta T = \Delta T_m$:

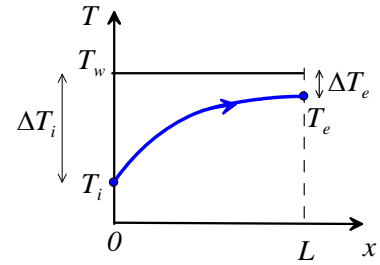
$$\Delta T_m = T_w - T_m$$

e um hipótese mais correcta será usar uma média logarítmica $\Delta T = \Delta T_{ln}$:

$$\Delta T_{ln} = \frac{\Delta T_i - \Delta T_e}{\ln\left(\frac{\Delta T_i}{\Delta T_e}\right)}$$

com:

$$\Delta T_i = T_w - T_i \text{ e } \Delta T_e = T_w - T_e.$$



Demonstra-se que esta segunda hipótese, da média logarítmica, resulta teoricamente da situação em que as propriedades do fluido são constantes, o coeficiente h não varia ao longo do tubo, e o perímetro molhado da conduta é constante. Nestas condições a temperatura à saída do tubo é dada por:

$$T_e = T_w - (T_w - T_i)e^{-A_p h / \dot{m} c_p}$$

Se o parâmetro $NTU \equiv A_p h / \dot{m} c_p$ (NTU = número de unidades de transferência) for grande (tipicamente maior do que 5) o valor de T_e vem praticamente igual à temperatura na parede T_w .

A temperatura média do fluido numa secção qualquer do tubo ($A_p(x) = Px$) é dada por uma expressão semelhante:

$$T(x) = T_w - (T_w - T_i)e^{-(Ph / \dot{m} c_p)x}.$$

Estas fórmulas são válidas para o caso de aquecimento do fluido ($T_w > T_i$, como na figura acima), ou arrefecimento do fluido ($T_w < T_i$).

No caso de $\dot{q}_w = Cte$, a diferença de temperaturas entre a parede e o fluido é constante ao longo da conduta:

$$\dot{q}_w = h(T_w - T) = Cte \quad \Rightarrow (T_w - T) = Cte$$

o que implica que T_w e T aumentam linearmente:

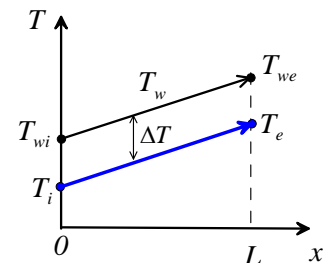
$$T(x) = T_i + \dot{q}_w Px / \dot{m} c_p$$

e

$$T_e = T_i + \dot{q}_w A_p / \dot{m} c_p$$

em que a área de permuta é dada pelo perímetro da secção da conduta multiplicada pelo seu comprimento, $A_p = PL$. As temperaturas na parede, à entrada e saída duma zona de desenvolvimento completo, são dadas por:

$$T_{wi} = T_i + \dot{q}_w / h \quad \text{e} \quad T_{we} = T_e + \dot{q}_w / h.$$



7.3.1 Convecção forçada dentro de tubos lisos

- a. Laminar, em desenvolvimento térmico:

$$Nu = 1.86 \left(\frac{D}{L} Re Pr \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad Pr > 0.5; Re < 2300; Gz^{-1} = \frac{L}{D Re Pr} < 0.05$$

(Sieder e Tate; propriedades a $T_m = 0.5(T_i + T_e)$)

- b. Laminar desenvolvido, em condutas com secções diversas ($Re = UD_H / \nu$):

Geometria	$T_w = Cte.$	$q_w = Cte.$	Factor atrito f
Cilindro	$Nu=3.66$	$Nu=4.36$	$64.00/Re$
Hexágono	$Nu=3.35$	$Nu=4.00$	$60.20/Re$
Quadrado	$Nu=2.98$	$Nu=3.61$	$56.92/Re$
Rectângulo 2:1	$Nu=3.39$	$Nu=4.12$	$62.20/Re$
3:1	$Nu=3.96$	$Nu=4.79$	$68.36/Re$
4:1	$Nu=4.44$	$Nu=5.33$	$72.92/Re$
6:1	$Nu=5.14$	$Nu=6.05$	$78.80/Re$
8:1	$Nu=5.60$	$Nu=6.49$	$82.32/Re$
infinito	$Nu=7.54$	$Nu=8.24$	$96.00/Re$
Elipse 2:1	$Nu=3.74$	$Nu=4.56$	$67.28/Re$
4:1	$Nu=3.79$	$Nu=4.88$	$72.96/Re$
8:1	$Nu=3.72$	$Nu=5.09$	$76.60/Re$
16:1	$Nu=3.65$	$Nu=5.18$	$78.16/Re$
Triângulo isósceles 10°	$Nu=1.61$	$Nu=2.45$	$50.80/Re$
30°	$Nu=2.26$	$Nu=2.91$	$52.28/Re$
60°	$Nu=2.47$	$Nu=3.11$	$53.32/Re$
90°	$Nu=2.34$	$Nu=2.98$	$52.60/Re$
120°	$Nu=2.00$	$Nu=2.68$	$50.96/Re$

- c. Turbulento, desenvolvido: $Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$ $Re > 10\,000; 0.7 \leq Pr \leq 160$
com: $n = 0.4$ aquecimento; $n = 0.3$ arrefecimento

(Dittus e Boulter; propriedades a $T_m = 0.5(T_i + T_e)$)

Tubos não cilíndricos, **diâmetro hidráulico**: $D_H = 4A / P$ e $Re = \rho D_H U / \mu$

com: A – área da secção transversal; P – perímetro molhado.

7.3.2 Tubos rugosos – Em escoamento laminar a rugosidade não tem influência na transferência de calor ou no atrito. Em escoamento turbulento, a rugosidade da parede, superfícies artificialmente corrugadas ou aplicação de alhetas internas, faz aumentar o coeficiente convectivo h . Nesta situação, de regime turbulento, o número de Nusselt deve obter-se do coeficiente de atrito, usando a analogia de Chilton-Colburn:

$$\frac{Nu}{Re Pr^{1/3}} = \frac{1}{2} C_f \quad (Re \geq 4000)$$

com C_f dado abaixo (Moody ou Haaland).

7.3.3 Comprimentos de desenvolvimento, hidrodinâmico (L_h) e térmico (L_t):

Laminar: $L_h / D = 0.05 Re$; $L_t / D = 0.05 Re \times Pr$

Turbulento: $L_h = L_t = 10D$

7.3.4 Coeficientes de atrito ($\Delta p = f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho U^2$; $f = 4C_f$; $C_f = \tau_w / \frac{1}{2} \rho U^2$)

O coeficiente de atrito C_f não é mais do que a tensão de corte na parede (τ_w) adimensionalizada com a energia cinética média do escoamento. Permite obter a perda de pressão (perda de carga) que ocorre numa conduta $\Delta p = p_i - p_e$, e assim calcular a potência de bombagem necessária para mover o fluido: $\dot{W}_b = \dot{V} \Delta p = \dot{m} \Delta p / \rho$ [W].

Tubo, laminar: $f = 64 / Re$ ou $C_f = 16 / Re$ (*Hagen-Poiseuille*, teórico)

Tubo liso, turbulento: $f = 0.184 / Re^{0.2}$; $C_f = 0.046 / Re^{0.2}$ (*Moody*; $Re \geq 4000$)

Tubo liso, turbulento: $C_f = 0.079 / Re^{1/4}$ (*Blasius*; $3000 \leq Re \leq 10^5$)

Tubo rugoso, turbulento: $\frac{1}{\sqrt{C_f}} = -3.6 \log_{10} \left[\frac{6.9}{Re} + \left(\frac{k/D}{3.71} \right)^{1.11} \right]$ (*Haaland*)

Rugosidades absolutas (*Moody; Massey*)

Material	k (mm)
Aço com rebites	1 – 10
Betão	0.3 – 3
Réguas madeira	0.2 – 1
Ferro fundido	0.25
Aço galvanizado	0.15
Ferro revestido a asfalto	0.12
Aço comercial ou ferro forjado	0.045
Tubo extrudido	0.0015

7.4 Anexo (material avançado)

Dedução da diferença média logarítmica

Considerando que o fluido está a aquecer ao longo de uma conduta cuja parede está à temperatura uniforme T_w , superior à temperatura média do fluido ($T = T(x)$) numa secção qualquer x , temos que a transferência de calor entre a parede e o fluido numa porção de conduta entre x e $x+dx$ é:

$$d\dot{Q} = (Pdx)h(T_w - T)$$

com P a representar o perímetro molhado da conduta e h o coeficiente convectivo local. Este calor faz aumentar a entalpia (e a temperatura) do fluido:

$$d\dot{Q} = \dot{m}c_p dT$$

em que \dot{m} é o caudal mássico de fluido na conduta (constante, por conservação de massa) e c_p a capacidade térmica específica do fluido a pressão constante. Igualando estas duas expressões para a taxa de calor diferencial, temos:

$$\dot{m}c_p dT = Ph(T_w - T)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{d(T - T_w)}{(T - T_w)} = -\frac{Ph}{\dot{m}c_p} dx$$

Designando $T' = T - T_w$ e integrado entre a entrada da conduta ($x = 0$, $T = T_i$) e a saída da conduta ($x = L$, $T = T_e$), temos:

$$\int_{T_i}^{T_e} \frac{dT'}{T'} = -\int_0^L \frac{Ph}{\dot{m}c_p} dx \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{T_e - T_w}{T_i - T_w}\right) = -\int_0^L \frac{Ph}{\dot{m}c_p} dx = -\frac{Ph}{\dot{m}c_p} L = -\frac{A_p h}{\dot{m}c_p}$$

Na integração assumiu-se que o perímetro é constante (para tubo redondo de diâmetro D , $P = \pi D$), e o coeficiente convectivo ou é também constante, ou será baseado num valor médio, $h \equiv h_m = \frac{1}{L} \int_0^L h dx$. A área de permuta é $A_p = PL$. O resultado acima

permite desde logo obter a temperatura do fluido à saída da conduta:

$$\ln\left(\frac{T_e - T_w}{T_i - T_w}\right) = -\frac{A_p h}{\dot{m}c_p} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_e - T_w}{T_i - T_w} = \exp\left(-\frac{A_p h}{\dot{m}c_p}\right)$$

ou

$$\boxed{T_e = T_w + (T_i - T_w) \exp\left(-\frac{A_p h}{\dot{m}c_p}\right)}$$

Uma integração de 0 até x fornece ainda a temperatura numa secção qualquer da conduta:

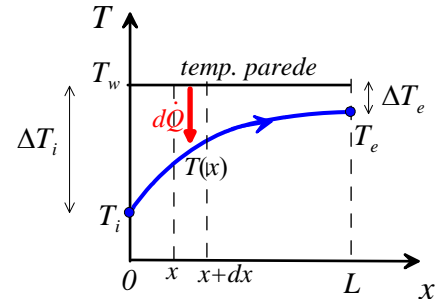
$$T(x) = T_w + (T_i - T_w) \exp\left(-\frac{A_p h}{\dot{m}c_p} \frac{x}{L}\right)$$

A equação que dá a transmissão de calor global em toda a conduta, e define a diferença média de temperaturas, é:

$$\dot{Q} = A_p h \Delta T$$

e o balanço global de energia (calor transferido para o fluido aumenta a sua entalpia) é:

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p (T_e - T_i)$$



Dividindo uma pela outra, e usando o resultado acima para o logaritmo das diferenças de temperatura entre a parede e o fluido na entrada e saída, temos:

$$\Delta T = \frac{\dot{m}c_p}{A_p h} (T_e - T_i) \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{(T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{T_i - T_w}{T_e - T_w}\right)}$$

finalmente, com $\Delta T_i = T_w - T_i$, $\Delta T_e = T_w - T_e$, $\Delta T_i - \Delta T_e = (T_w - T_i) - (T_w - T_e) = T_e - T_i$

$$\Delta T = \boxed{\Delta T_{\ln} = \frac{\Delta T_i - \Delta T_e}{\ln\left(\frac{\Delta T_i}{\Delta T_e}\right)}}.$$

Esta expressão é válida para o caso em que o fluido está a ser arrefecido (neste caso $\Delta T_i = T_i - T_w$ e $\Delta T_e = T_e - T_w$) e continua a ser válida quando a temperatura da parede também varia ($\Delta T_i = T_{wi} - T_i$ e $\Delta T_e = T_{we} - T_e$). Pode escrever-se trocando a ordem das parcelas (ou seja, é indiferente saber se o fluido está a entrar ou sair por i ou e):

$$\Delta T_{\ln} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_i}{\ln\left(\frac{\Delta T_e}{\Delta T_i}\right)}.$$

7.5 Exemplos ilustrativos

Exemplo 1- Escoamento exterior sobre placa plana. Ar atmosférico a 20 °C e 1 m/s escoa-se sobre parede quadrada de 1 m x 1 m. A temperatura da parede é 40 °C. Calcular a taxa de calor transferido da parede para o ar.

A temperatura de filme (média entre temperatura da parede e do fluido), usada como referência para o cálculo das propriedades do ar, é:

$$T_f = \frac{1}{2}(T_w + T_\infty) = \frac{1}{2}(40 + 20) = 30 \text{ °C}$$

e das tabelas para ar, obtém-se:

$$\rho = 1.164 \text{ kg/m}^3; \quad k = 0.02588 \text{ W/m.K}; \quad \mu = 1.872 \times 10^{-5} \text{ kg/m.s}; \\ \nu = 1.608 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}; \quad Pr = 0.7282.$$

O número de Reynolds baseado no comprimento da placa (nesta caso, quadrada) é

$$Re = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{1 \times 1}{1.608 \times 10^{-5}} = 62\,179$$

o que corresponde a escoamento laminar na camada limite ($Re < 5 \times 10^5$). O coeficiente de atrito médio, entre o bordo de ataque da placa e o seu comprimento, é

$$C_f = \frac{1.328}{Re^{1/2}} = \frac{1.328}{62\,179^{1/2}} = 0.00532$$

pelo que a tensão de corte na parede vem

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \Rightarrow \tau_w = C_f \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = 0.00532 \times (0.5 \times 1.164 \times 1^2) = 0.00310 \text{ N/m}^2$$

e a força de arrastamento, que o ar a 36 km/h aplica tangencialmente sobre a placa, será dada pelo produto da tensão e a área superficial:

$$F_w = \tau_w A = 0.00310 \times (1 \times 1) = 3.10 \times 10^{-3} \text{ N}.$$

O número de Nusselt médio obtém-se da correlação:

$$Nu = 0.664 Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

que fornece

$$Nu = 0.664 \times 62\,179^{1/2} \times 0.7282^{1/3} = 149.0$$

O coeficiente convectivo calcula-se de:

$$Nu = hL / k \Rightarrow h = Nu \times k / L = 3.855 \text{ W/m}^2.\text{°C}$$

e a taxa de transferência de calor por convecção, da parede para o ar atmosférico,

$$\dot{Q} = hA(T_w - T_\infty) = 3.855 \times 1 \times (40 - 20) = 77 \text{ W}.$$

Exemplo 2- Escoamento interior em conduta quadrada. Uma conduta de secção quadrada, 15 cmx15 cm, e comprimento 10 m, transporta 0.10 m³/s de ar quente e serve para aquecer o espaço envolvente num sótão. O ar é admitido na conduta a 85 °C e a temperatura das paredes da conduta é aproximadamente constante, a 70 °C. Calcular o calor transferido por unidade de tempo, a temperatura do ar à saída da conduta e a potência do ventilador. (Cengel)

Assumindo uma temperatura média entre o ar e a parede de 80 °C (para evitar fazer interpolações nas tabelas), têm-se as seguintes propriedades físicas do ar:

$$\rho = 0.9994 \text{ kg/m}^3; \quad k = 0.02953 \text{ W/m.K}; \quad c_p = 1008 \text{ J/kg.}^\circ\text{C}; \\ \nu = 2.097 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}; \quad Pr = 0.7154.$$

O caudal volumétrico à entrada permite calcular a velocidade média:

$$\dot{V} = UA \text{ m}^3/\text{s} \Rightarrow U = \dot{V} / A = 0.10 / (0.15 \times 0.15) = 4.444 \text{ m/s}$$

e o número de Reynolds vem:

$$Re = \frac{UD_H}{\nu} = \frac{4.444 \times 0.15}{2.097 \times 10^{-5}} = 31\,791$$

correspondendo a escoamento turbulento na conduta ($Re > 4000$). O diâmetro hidráulico é dado pelo lado da secção quadrada:

$$D_H = 4 \frac{A}{P} = 4 \frac{0.15 \times 0.15}{4 \times 0.15} = 0.15 \text{ m}.$$

O caudal mássico, necessário adiante, é obtido multiplicando o caudal volumétrico pela massa volúmica baseada na temperatura de entrada (onde o caudal foi medido):

$$\dot{m} = \rho_i \dot{V} = 0.9856 \times 0.10 = 0.09856 \text{ kg/s}$$

com $\rho_i = 0.9856 \text{ kg/m}^3$ a 85°C.

Tratando-se de um processo de arrefecimento (o ar está mais quente do que as paredes da conduta), a correlação de Dittus e Boulter é:

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.3} \Rightarrow Nu = 0.023 \times 31\,791^{0.8} \times 0.7154^{0.3} = 83.16$$

e o coeficiente convectivo vem:

$$h = Nu \times k / L = 83.16 \times 0.02953 / 0.15 = 16.37 \text{ W/m}^2.^\circ\text{C}$$

Verifica-se que se trata de um valor superior aos habitualmente encontrados com convecção natural, como seria esperado. A taxa de transferência de calor por convecção é dada por:

$$\dot{Q} = hA_p \Delta T_{\ln}$$

necessitando do cálculo da temperatura média logarítmica:

$$\Delta T_{\ln} = \frac{\Delta T_i - \Delta T_e}{\ln\left(\frac{\Delta T_i}{\Delta T_e}\right)}$$

com $\Delta T_i = T_i - T_w = 85 - 70 = 15^\circ\text{C}$ e $\Delta T_e = T_e - T_w$.

A temperatura média do ar à saída da conduta obtém-se de:

$$T_e = T_w - (T_w - T_i)e^{-NTU} = 70 - (70 - 85)e^{-0.9888} = 75.58^\circ\text{C}$$

em que o número de unidades de transferência, para uma área de permuta de $A_p = 4aL = 6\text{ m}^2$, é definido como

$$NTU = A_p h / \dot{m}c_p = 6 \times 16.37 / (0.09856 \times 1008) = 0.9888.$$

Assim, $\Delta T_e = 75.58 - 70 = 5.58^\circ\text{C}$, e

$$\Delta T_{\ln} = \frac{15 - 5.58}{\ln\left(\frac{15}{5.58}\right)} = 9.526^\circ\text{C}$$

pelo que a taxa de transferência de calor é:

$$\dot{Q} = hA_p \Delta T_{\ln} = 16.37 \times 6 \times 9.526 = 935.6 \text{ W}$$

ou

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p (T_i - T_e) = 0.09856 \times 1008 \times (85 - 75.58) = 935.8 \text{ W}.$$

Podia-se voltar a fazer os cálculos com as propriedades obtidas à temperatura média global $T_m = 0.5(T_i + T_e) = 0.5(85 + 75.58) = 80.3^\circ\text{C}$ mas os resultados iriam ser praticamente idênticos.

Cálculo da perda de carga: o coeficiente de atrito, da expressão de Blasius, é dado por:

$$C_f = 0.079 / Re^{1/4} = 0.079 / 31791^{0.25} = 0.005916$$

pelo que a tensão média na parede interior da conduta vem:

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho U^2 C_f = 0.5 \times 0.9994 \times 4.444^2 \times 0.005916 = 0.05840 \text{ N/m}^2.$$

A perda de pressão correspondente é dada por

$$\Delta p = 4C_f \frac{L}{D_H} \frac{1}{2} \rho U^2 = 4 \times 0.005916 \times \frac{10}{0.15} \times 0.5 \times 0.9994 \times 4.444^2 = 15.6 \text{ N/m}^2$$

que também poderia ser obtida do balanço de forças global: $A\Delta p = A_p \tau_w$. O ventilador usado para mover o ar quente terá de produzir um aumento de pressão superior a esta perda de carga. A sua potência é calculada de:

$$\dot{W}_{\text{ventilador}} = \dot{V} \Delta p = 0.1 \times 15.6 = 1.6 \text{ W}.$$

Capítulo 7 – Convecção forçada

7.6 Exercícios:

- 1) Óleo a 80 °C escorre a uma velocidade de 3 m/s ao longo duma placa plana de 6 m de comprimento cuja temperatura superficial é 30 °C. Calcular a força que o óleo exerce sobre a placa e o calor transferido, por metro de largura da placa. Resp: 82.4 N/m; 20.5 kW/m.
- 2) Num dia de inverno, vento a 5°C e 55 km/h sopra paralelamente a uma parede com dimensões 4 m altura x 10 m comprimento. Se a temperatura da parede for 12 °C, qual o calor perdido através desta? Se a velocidade do vento passar para o dobro, qual a nova taxa de transferência de calor? Resp: 9081 W; aumento aproximado de 1.74 vezes.
- 3) Um transformador de 20 W, com dimensões 10x6.2x5 cm é arrefecido aplicando-se um dissipador de calor, cuja base tem 10x6.2 cm, e possuindo 7 alhetas rectangulares (5 mm x 2 mm x 10 cm). O ar envolvente está a 25 °C e é soprado por um ventilador paralelamente às passagens entre alhetas. Desprezando a radiação e assumindo que a superfície do transformador e do dissipador está a temperatura uniforme, que não pode ser superior a 60 °C, calcular a velocidade mínima do ar para evitar sobre aquecimento. Resp: 2.8 m/s.
- 4) Um cano comprido com 8 cm diâmetro cuja temperatura superficial é 90 °C, atravessa um espaço exterior não protegido, com ar atmosférico a 7°C e velocidade do vento 50 km/h. Calor perdido por unidade de comprimento do tubo? Resp: 1883 W/m.
- 5) Ar quente a 85 °C entra numa conduta não isolada, de secção quadrada (15x15 cm) e comprimento 10 m, que atravessa um sótão. O caudal fornecido é 0.10 m³/s e a parede da conduta está a uma temperatura uniforme de 70 °C. Calcular a temperatura do ar à saída e a taxa de calor perdido pelas paredes da conduta. Resp: 75.6 °C; 937 W.
- 6) Água é aquecida de 12 °C para 70 °C ao percorrer um tubo de 2 cm de diâmetro e 7 m de comprimento, envolvido por uma resistência eléctrica que fornece, através da parede do tubo, um fluxo de calor uniforme. Calcular a potência eléctrica necessária para aquecer um caudal de água de 8 litros por minuto, e a temperatura da parede do tubo na saída. Resp: 31.6 kW; 98.4 °C.
- 7) Uma conduta de secção rectangular (15x20 cm) e comprimento 7 m recebe ar quente a 50°C com velocidade média 7 m/s. Se a temperatura da parede da conduta for constante, igual a 10 °C, calcular: a) temperatura do ar à saída; b) potência calorífica transferida do ar; c) potência eléctrica do ventilador. Resp: 33.8 °C; 3734 W; 4.5 W.
- 8) Uma pipeline (40 cm diâmetro, 300 m comprimento) transporta óleo a 10 °C, com velocidade média 5 m/s. A pipeline atravessa um lago gelado, no inverno, e por isso a temperatura da parede é assumida constante a 0°C. Obter: a) temperatura do óleo à saída; b) calor transferido; c) potência mecânica da bomba que faz mover o óleo. Resp: 8.9 °C; 109 kW; 4.4 kW.
- 9) Um computador contém 8 PCB de 10 W cada, montados em placas de 18 cm largura x 12 cm altura, havendo um espaço de 0.3 cm entre PCBs por onde circula ar de arrefecimento, dirigido ao longo da largura dos PCBs. O ventilador tem potência mecânica 25 W e o aumento de temperatura do ar, entre a entrada e a saída, não excede 10 °C. Calcular: a) o caudal de ar; b) a percentagem de

aumento de temperatura do ar devido ao ventilador; c) a temperatura máxima do ar à entrada, para que a temperatura superficial dos PCBs não exceda 70 °C.
Resp: 0.00794 kg/s; 31 %; 51.4 °C.

Cap. 8 – Radiação

A radiação, no contexto da transmissão de calor, consiste no transporte de energia por meio de ondas electromagnéticas. As ondas electromagnéticas propagam-se no vazio à velocidade da luz ($c = 2.998 \times 10^8$ m/s) e, assim, a radiação, ao contrário da condução e da convecção, não necessita de um meio material para que a transferência de energia se efectue. Como exemplo, uma pequena parte da energia emitida pelo Sol é transferida por radiação para a Terra, depois de percorrer cerca de 150 milhões de km de espaço vazio (o fluxo de irradiação solar na zona exterior da atmosfera é designado por constante solar: $G_s = 1350$ W/m²). A radiação térmica corresponde à radiação electromagnética emitida por um corpo como resultado da sua temperatura.

8.1 Noções de base

Lei de Stefan-Boltzmann, dá o fluxo radiante total emitido por um corpo ideal, designado por corpo negro, que absorve toda a radiação incidente e emite o máximo de radiação possível (índice b para “*black-body*”, corpo negro):

$$E_b = \sigma T^4$$

em que:

E_b - poder emissivo do corpo negro [W/m²];

σ - constante de Stefan-Boltzmann, $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$ [W/(m² K⁴)];

T - temperatura absoluta do corpo emissor [K].

Poder emissivo espectral do corpo negro no vazio, radiação emitida por unidade de tempo, de área e de comprimento de onda, em torno do comprimento de onda λ [μm]

(Nota: $1 \mu\text{m} = 10^{-6}$ m), é dado pela lei da distribuição de Planck:

$$E_{b\lambda}(T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad [\text{W}/(\text{m}^2 \mu\text{m})]$$

As duas constantes são:

$$C_1 = 2\pi h c^2 = 3.742 \times 10^8 \quad [\text{W} \mu\text{m}^4/\text{m}^2]$$

$$C_2 = hc / k = 1.439 \times 10^4 \quad [\text{K} \mu\text{m}].$$

em que c é a velocidade da luz no vazio, $h = 6.625 \times 10^{-34}$ [J s] é a constante de Planck e $k = 1.381 \times 10^{-23}$ [J/K] a constante de Boltzmann.

Nota: o **poder emissivo total**, dado pela lei de Stefan-Boltzmann, pode também ser obtido por integração do poder emissivo espectral sobre todos os comprimentos de onda:

$$E_b(T) = \int_0^{\infty} E_{b\lambda}(T) d\lambda = \sigma T^4 \quad \text{com } \sigma = (2/15)\pi^5 k^4 / h^3 c^2$$

A fracção de energia radiada pelo corpo negro, entre $\lambda = 0$ e um valor qualquer de comprimento de onda λ , está tabelada (ver Tabela 1) e é representada por:

$$f_{\lambda}(T) = E_{b,0-\lambda}(T) / E_b(T) \quad \text{ou} \quad f_{\lambda}(T) = \int_0^{\lambda} E_{b\lambda}(T) d\lambda / \int_0^{\infty} E_{b\lambda}(T) d\lambda$$

Para se calcular a energia radiada por um corpo negro entre dois comprimentos de onda λ_1 e λ_2 , faz-se:

$$f_{\lambda_1-\lambda_2}(T) = f_{\lambda_1}(T) - f_{\lambda_2}(T) \quad \text{e} \quad E_{b,\lambda_1-\lambda_2} = f_{\lambda_1-\lambda_2} \times E_b(T) \quad [\text{W/m}^2]$$

Lei do deslocamento de Wien, a energia espectral emitida por um corpo negro à temperatura T é máxima quando o comprimento de onda λ_{\max} é :

$$\boxed{\lambda_{\max} T = 2897.8} \quad [\text{K} \cdot \mu\text{m}].$$

Esta relação pode ser obtida fazendo a derivada de $E_{b\lambda}(T)$ relativamente a λ e igualando a zero, para se determinar o ponto máximo. Mostra que o máximo da energia radiada por um corpo negro se desloca para comprimentos de onda mais curtos à medida que a temperatura absoluta do corpo aumenta.

O **Sol**, por exemplo, tem uma temperatura equivalente de corpo negro de $T_{\text{Sol}} \approx 5762 \text{ K}$ e, segundo a lei de Wien ($\lambda_{\max} \approx 0.5 \mu\text{m}$), os comprimentos de onda correspondentes ao poder emissivo espectral máximo do Sol estão na zona central da luz visível, $\lambda_{\text{visível}} = [0.40 - 0.76] \mu\text{m}$. Comprimentos de onda menores que $0.40 \mu\text{m}$ correspondem à zona do **ultra-violeta** (maiores frequência e, logo, maiores energias), e maiores que $0.76 \mu\text{m}$ correspondem à zona do **infra-vermelho**. A radiação térmica começa a ser visível a partir de temperaturas superiores a cerca de 800 K e a lei de Wien mostra que para $T \leq 800 \text{ K}$, os $E_{b\lambda}$ máximos correspondem a λ no infra-vermelho ($\lambda \geq 3.6 \mu\text{m}$). A **radiação térmica** abrange aproximadamente os comprimentos de onda de $0.1 \mu\text{m}$ até $100 \mu\text{m}$, que compreende o espectro ultra-violeta próximo, o visível, e grande parte do infra-vermelho. A **radiação solar** ($\lambda_s = 0.1$ a $3 \mu\text{m}$) é composta pela radiação visível (cerca de metade) acrescida por uma porção de ultra-violeta e de infra-vermelho.

Em geral as propriedades da radiação e da interacção entre radiação e matéria são complexas, porque podem depender da temperatura (da superfície receptora e da fonte emissora), do comprimento de onda (propriedades espectrais) e da direcção (propriedades direccionais). Por isso, em engenharia é usual fazerem-se aproximações aceitáveis, que permitem simplificar e tornar tratáveis os problemas envolvendo radiação.

Radiação difusa: independente da direcção (valores direccionais são indicados com índice θ).

Emissividade ε : razão entre a radiação (total) emitida por uma superfície real e a radiação de corpo negro à mesma temperatura,

$$\boxed{\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_b(T)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(T) = \varepsilon(T) E_b(T)}$$

Emissividade espectral ε_{λ} , relação entre essas radiações para um dado comprimento de onda:

$$\varepsilon_{\lambda}(T) = E_{\lambda}(T) / E_{b\lambda}(T)$$

Superfície cinzenta: ε não depende do comprimento de onda (isto é, $\varepsilon_{\lambda} = Cte$).

Superfície difusa: ε não depende da direcção (isto é, $\varepsilon_\theta = Cte$).

Irradiação G : radiação incidente numa superfície, por unidade de área e de tempo
[W/m²]

Se parte da irradiação numa superfície for **difusa** (G_d) e outra parte **directa** (G_D , segundo um ângulo θ com a normal à superfície), a irradiação total é:

$$G = G_d + G_D \cos \theta \quad [\text{W/m}^2]$$

A radiação incidente pode ser **absorvida, reflectida e transmitida**,

$$G = G_{abs} + G_{ref} + G_{tran} \quad 1 = G_{abs} / G + G_{ref} / G + G_{tran} / G$$

o que permite definir o coeficiente de absorção (a **absorsividade**, α), o coeficiente de reflexão (a **reflectividade**, ρ) e o coeficiente de transmissão (a **transmissividade**, τ):

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

A **reflexão** pode ser:

Especular – o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência (como num espelho);

Difusa – espalhada igualmente em todas as direcções.

Lei de Kirchhoff, em determinadas condições, a absorpsividade é igual à emissividade:

$$\alpha = \varepsilon$$

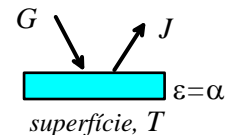
Coeficientes totais, $\varepsilon(T) = \alpha(T)$ (assume que a temperatura T da superfície emissora é igual à temperatura T da fonte de irradiação)

Coeficientes espectrais, $\varepsilon_\lambda(T) = \alpha_\lambda(T)$ (válida para radiação difusa)

Coeficientes espectrais/direccionais, $\varepsilon_{\lambda\theta}(T) = \alpha_{\lambda\theta}(T)$ (válida sem restrições).

Nota: deve ter-se cuidado ao aplicar a lei de Kirchhoff como $\alpha = \varepsilon$ pois enquanto a emissividade depende essencialmente da temperatura da superfície emissora, a absorpsividade depende sobretudo da temperatura da fonte de radiação que atinge essa superfície. Por exemplo, um metal coberto com uma camada fina de crómio negro apresenta uma absorpsividade à radiação solar ($\lambda \sim 0.5 \mu\text{m}$) de $\alpha_s = 0.87$ enquanto a sua emissividade a temperaturas ambientes ($\lambda \sim 8 \mu\text{m}$) é somente $\varepsilon = 0.09$.

Radiosidade (ou radiância) J , radiação total, por unidade de área e de tempo, que deixa uma superfície.



8.2 Balanços de radiação em superfícies difusas, cinzentas e opacas

A radiosidade é igual à radiação emitida mais a radiação reflectida:

$$J_i = E_i + \rho_i G_i$$

e, para uma superfície i **cinzenta** ($\alpha = \varepsilon$) e **opaca** ($\tau = 0 \Rightarrow \alpha + \rho = 1$), tem-se:

$$J_i = \varepsilon_i E_{bi} + (1 - \varepsilon_i) G_i \quad G_i = \frac{J_i - \varepsilon_i E_{bi}}{1 - \varepsilon_i}$$

A transferência de energia radiante líquida (“*net*”) numa superfície genérica i (radiação que sai, a radiosidade, menos a radiação que entra, a irradiação) é dada por:

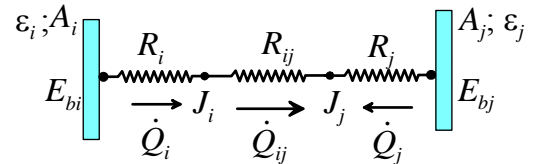
$$\dot{Q}_i = A_i (J_i - G_i)$$

e com a relação anterior para obtém-se:

$$\Rightarrow \dot{Q}_i = \frac{E_{bi} - J_i}{R_i} \text{ [W]}$$

em que a **resistência radiativa da superfície** é definida como:

$$R_i = \frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i}$$



Nesta expressão, e na figura ao lado, \dot{Q}_i é assumido como positivo a sair da superfície i (na prática, $\dot{Q}_i < 0$ indica que a superfície i está a receber calor por radiação).

8.3 Factor de forma

O **factor de forma** F_{ij} representa a parte da área de j que é “vista” pela radiação proveniente de i e o seu cálculo só tem a ver com questões geométricas. Como

F_{ij} = fracção da radiação proveniente de i que atinge directamente j

tem-se

$$0 \leq F_{ij} \leq 1 \text{ e } \sum_{j=1}^N F_{ij} = 1 \text{ (recinto fechado com } N \text{ superfícies)}$$

Existem tabelas e gráficos que fornecem factores de forma para um número elevado de geometrias que ocorrem frequentemente nas aplicações.

Uma **superfície convexa** não pode radiar directamente para si própria e por isso o auto-factor de forma (F_{ii} com i igual a j) é nulo. O mesmo acontece para uma superfície plana, que irradia para o espaço hemisférico que a rodeia, mas não para si própria:

$F_{ii} = 0$ - superfície i convexa ou plana.

Tem-se ainda, por **reciprocidade** (usada antes):

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

8.4 Transferência de radiação entre superfícies

A transferência radiante líquida entre duas superfícies i e j (radiação que sai de i e atinge j , menos radiação que sai de j e atinge i):

$$\dot{Q}_{ij} = A_i F_{ij} J_i - A_j F_{ji} J_j = A_i F_{ij} (J_i - J_j) \Rightarrow \dot{Q}_{ij} = \frac{J_i - J_j}{R_{ij}}$$

com a **resistência radiativa do espaço** entre i e j definida por:

$$R_{ij} = \frac{1}{A_i F_{ij}}$$

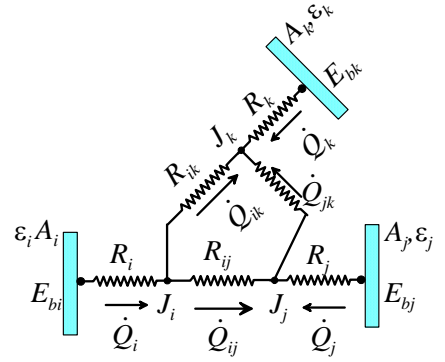
Para superfícies negras (ε_i e $\varepsilon_j = 1$), a resistência de superfície é nula, ou seja $J_i = E_{bi}$, pelo que a taxa de transferência de calor radiante líquida fica:

$$(\dot{Q}_{ij})_b = A_i F_{ij} (E_{bi} - E_{bj})$$

Num recinto com N superfícies, tem-se:

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^N \dot{Q}_{ij} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{J_i - J_j}{R_{ij}} \right) = \frac{E_{bi} - J_i}{R_i}$$

O esquema ao lado ilustra transferências de radiação entre 3 superfícies (de i , para j e k).



Superfícies negras: $\epsilon_i = 1$, logo a resistência superficial vem $R_i = 0$, o que implica:

$$J_i = E_{bi} \text{ (não há radiação reflectida)}$$

e

$$\dot{Q}_{ij} = A_i F_{ij} (E_{bi} - E_{bj}) = A_i F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4).$$

8.5 Recinto com duas superfícies.

Trata-se de um caso particular das relações dadas acima para recintos com superfícies cinzentas. Tem-se

$$\dot{Q}_{12} = \dot{Q}_1 = -\dot{Q}_2$$

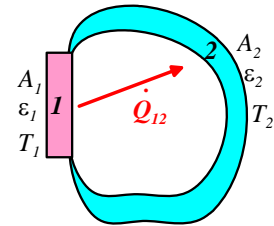
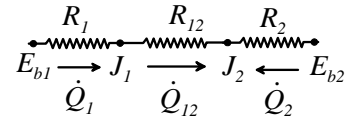
e de

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_{12} = \frac{J_1 - J_2}{R_{12}} = \frac{E_{b1} - J_1}{R_1} = -\frac{E_{b2} - J_2}{R_2}$$

$$\Rightarrow (R_1 + R_{12} + R_2) \dot{Q}_1 = E_{b1} - E_{b2}$$

obtém-se a taxa de transferência líquida entre 1 e 2:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}}$$



A fórmula anterior é particularmente útil em vários casos com geometria simples mas de interesse prático:

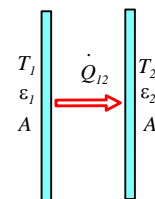
8.5.1 Objecto pequeno em cavidade grande ($A_1 / A_2 \approx 0$; $F_{12} = 1$)

$$\dot{Q}_{12} = A_1 \epsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

Nota: a emissividade das paredes da cavidade não aparece nesta expressão, o que mostra que a radiação na cavidade se comporta como radiação de corpo negro.

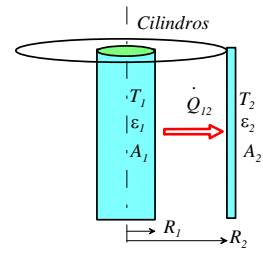
8.5.2 Placas paralelas infinitas ($A_1 = A_2 = A$; $F_{12} = 1$)

$$\dot{Q}_{12} = \frac{A \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$



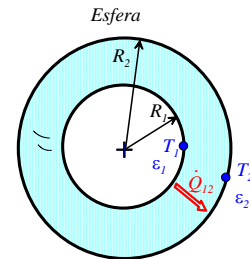
8.5.3 Cilindros concêntricos infinitos ($A_1 / A_2 = R_1 / R_2 ; F_{12} = 1$)

$$\dot{Q}_{12} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)}$$



8.5.4 Esferas concêntricas ($A_1 / A_2 = (R_1 / R_2)^2 ; F_{12} = 1$)

$$\dot{Q}_{12} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2}$$



Se as duas superfícies forem negras ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$), a expressão geral anterior resulta novamente na equação simplificada válida para corpos negros, que é sempre bom recordar:

$$\dot{Q}_{12} = A_1 F_{12} (E_{b1} - E_{b2}) = A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad [\text{W}].$$

8.6 Anexo 1 – Material Avançado: Resolução do balanço convecção/radiação numa superfície

Considere-se por exemplo a superfície exterior da fuselagem de um avião em voo, que recebe um fluxo de calor por radiação do sol, recebe também calor transferido por condução do interior do avião, e perde calor por radiação para o céu e por convecção forçada para a atmosfera envolvente. O balanço energético será:

$$G_s + q_i = q_r + q_c$$

com

$$q_i = q_w = \frac{T_i - T_s}{R_{t,w}} \quad \text{com resistência térmica da parede } R_{t,w} = \frac{1}{h_i} + \frac{e}{k}$$

$$q_r = \sigma \varepsilon (T_s^4 - T_{ceu}^4)$$

$$q_c = h(T_s - T_\infty).$$

Vamos considerar primeiro a situação em que não há ganhos de calor (solar e através da parede), ficando

$$-q_c = q_r \quad \Rightarrow h(T_\infty - T_s) = \sigma \varepsilon (T_s^4 - T_{ceu}^4)$$

Trata-se de uma equação em que a variável dependente (a incógnita), a temperatura na superfície exterior T_s , aparece elevada à quarta potência e por isso não pode ser resolvida facilmente de forma algébrica. Vamos aplicar um método numérico iterativo, o método de Newton-Raphson. Recordar-se que para resolver a equação

$$f(x) = 0$$

se aproxima a derivada como

$$f' = \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$$

em que x^* é o valor de x na iteração anterior, e o método vem definido pelo processo iterativo

$$x = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$$

porque $f(x) = 0$.

A nossa equação é escrita como:

$$f = \frac{\sigma \varepsilon}{h} (T_s^4 - T_{ceu}^4) - (T_\infty - T_s)$$

A derivada relativamente a T_s é

$$f' = \frac{\sigma \varepsilon}{h} 4T_s^3 + 1$$

E o método de Newton-Raphson escreve-se ($A = \frac{\sigma \varepsilon}{h}$):

$$T_s = T_s - \frac{A(T_s^4 - T_{ceu}^4) + T_s - T_\infty}{1 + 4AT_s^3}$$

Exemplo: o vidro de um carro a radiar para o céu numa noite sem nuvens. Dados: $T_{\infty} = 5^{\circ}\text{C}$ (inverno, ar frio); $T_{\text{ceu}} = 200\text{ K}$ (céu limpo); $h = 10\text{ W/m}^2\cdot^{\circ}\text{C}$ (sem vento, convecção natural); emissividade do vidro $\varepsilon = 0.95$.

Aplicando a fórmula anterior, partindo de um valor estimado $T_s = 0^{\circ}\text{C}$, obtém-se o resultado em 3 iterações (tolerância de paragem de 10^{-4}):

Iteração	T_s [K]	T_s [$^{\circ}\text{C}$]
0	273	0
1	261.67	-11.33
2	261.45	-11.55
3	261.45	-11.55

Resultado final: $T_s = -11.55^{\circ}\text{C}$.

O fluxo perdido por radiação, igual ao fluxo recebido pelo vidro por convecção do ar ambiente, é: $q_r = -q_c = 165.5\text{ W/m}^2\cdot^{\circ}\text{C}$.

Repare-se que mesmo com uma única iteração o valor da temperatura é já praticamente igual ao final, o que mostra a rapidez de convergência do método Newton-Raphson (método de 2ª ordem).

Do ponto de vista físico, é de realçar que a temperatura do vidro fica significativamente mais baixa do que a temperatura do ar ambiente exterior (-11°C contra 5°C), devido à perda de calor por radiação para o céu limpo (-73°C), o que explica a formação de geada sobre os automóveis deixados a céu aberto.

8.7 Anexo 2 – Material Avançado: Factor de forma

A parte da radiação proveniente de uma superfície A_1 que atinge directamente outra superfície A_2 , distantes entre si de r_{12} , com θ_1 = ângulo entre a normal a A_1 e r_{12} , e θ_2 = ângulo entre a normal a A_2 e r_{12} , é dada por:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dA_1 dA_2$$

De forma idêntica, a parte da radiação proveniente de A_2 que atinge directamente A_1 é:

$$F_{21} = \frac{1}{\pi A_2} \iint \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1}{r_{12}^2} dA_2 dA_1$$

verificando-se desde logo a relação de reciprocidade entre factores de forma:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$$

A troca líquida de radiação entre as duas superfícies, consideradas como superfícies negras, é dada pela diferença entre a radiação que sai de 1 e atinge 2, e a proveniente de 2 que atinge 1:

$$\dot{Q}_{12} = A_1 F_{12} \sigma T_1^4 - A_2 F_{21} \sigma T_2^4 \Rightarrow \boxed{\dot{Q}_{12} = A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4)}$$

Algumas relações úteis de factores de forma:

- 1- Dois discos paralelos com o mesmo raio R , separados por uma distância L (eixos concêntricos):

$$F_{12} = \frac{1 + 2R'^2 - \sqrt{1 + 4R'^2}}{2R'^2} \quad (R' = R/L)$$

- 2- Discos concêntricos paralelos de raios diferentes (R_1 e R_2), separados por L :

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left(S - \left[S^2 - 4(R_1/R_2)^2 \right]^{1/2} \right) \quad \left(S = 1 + \frac{1 + (R'_2)^2}{(R'_1)^2}, R'_i = R_i/L \right)$$

- 3- Placas rectangulares paralelas, lados X e Y , separação entre placas L

$$F_{12} = \frac{2}{\pi xy} \left\{ \ln \left[\frac{x'y'}{x' + y' - 1} \right]^{1/2} + xy'^{1/2} \arctan \left[\frac{x}{y'^{1/2}} \right] + yx'^{1/2} \arctan \left[\frac{y}{x'^{1/2}} \right] - x \arctan x - y \arctan y \right\}$$

com: $x = X/L$; $y = Y/L$; $x' = 1 + x^2$; $y' = 1 + y^2$.

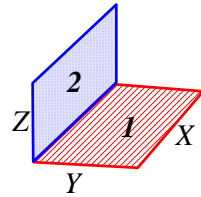
- 4- Placas rectangulares perpendiculares entre si, com lado comum (placa 1 com dimensões $X \times Y$; placa 2, $X \times Z$):

$$F_{12} = \frac{1}{\pi W} (A + B - C + D)$$

com: $A = W \arctan(1/W)$; $B = H \arctan(1/H)$; $C = (R)^{1/2} \arctan \left(\frac{1}{(R)^{1/2}} \right)$

$$D = \frac{1}{4} \ln \left\{ \left[\frac{W'H'}{1+R} \right] \left[\frac{W^2(1+R)}{W'R} \right]^{W^2} \left[\frac{H^2(1+R)}{H'R} \right]^{H^2} \right\}$$

$W = Y/X$; $H = Z/X$; $W' = 1 + W^2$; $H' = 1 + H^2$;
 $R = H^2 + W^2$



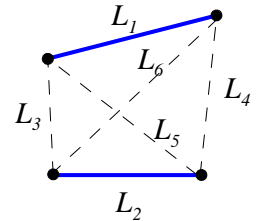
- 5- Recinto triangular, com lados L_1 , L_2 e L_3 (bidimensional, geometria muito comprida segundo a distância perpendicular ao plano do triângulo):

$$F_{12} = \frac{L_1 + L_2 - L_3}{2L_1}$$

- 6- Dois corpos muito compridos (bidimensional), com perímetros visíveis L_1 e L_2 num plano transversal ao comprimento:

$$F_{12} = \frac{(L_5 + L_6) - (L_3 + L_4)}{2L_1}$$

(L_5 e L_6 são linhas cruzadas entre as extremidades, e L_3 e L_4 linhas não cruzadas).

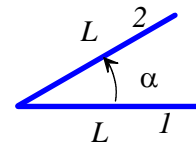


- 7- Dois tubos circulares paralelos (diâmetro D), separados por distância S :

$$F_{12} = \frac{\sqrt{S^2 + D^2} - S}{\pi D/2}$$

- 8- Placas planas compridas, com aresta comum e ângulo α :

$$F_{12} = 1 - \sin \frac{\alpha}{2}$$

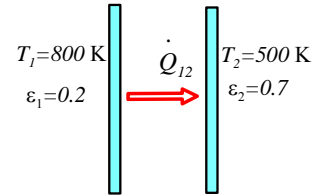


8.8 Exemplos resolvidos

Exemplo 1 – Transferência de radiação entre duas placas planas. Calcular a taxa de transferência de energia radiante por unidade de área entre duas placas planas consideradas como infinitas, estando uma a 800 K (emissividade 0.2) e a outra a 500 K (emissividade 0.7).

Temos $T_1 = 800$ K, $\varepsilon_1 = 0.2$ e $T_2 = 500$ K, $\varepsilon_2 = 0.7$. Para esta geometria, com área superficial unitária $A = 1$ m², a troca de radiação entre as placas 1 e 2, através do meio considerado como transparente (não afecta a intensidade da radiação), é dada pela equação:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{1 \times 5.67 \times 10^{-8} \times (800^4 - 500^4)}{\frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.7} - 1} = 3625 \text{ W.}$$



Nota: este resultado pode ser escrito usando um coeficiente radiativo equivalente (ver Capítulo de Introdução):

$$\dot{Q}_{12} = Ah_r(T_1 - T_2) \text{ com } h_r = \frac{\sigma(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Substituindo valores,

$$h_r = \frac{5.67 \times 10^{-8} \times (800^2 + 500^2) \times (800 + 500)}{\frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.7} - 1} = 12.08 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$$

e

$$\dot{Q}_{12} = Ah_r(T_1 - T_2) = 1 \times 12.08 \times (800 - 500) = 3625 \text{ W,}$$

confirmando-se o resultado anterior. Neste problema, o valor de h_r é significativo, sendo superior aos valores típicos encontrados em convecção natural ($h_c \approx 5 - 10$ W/(m² K)).

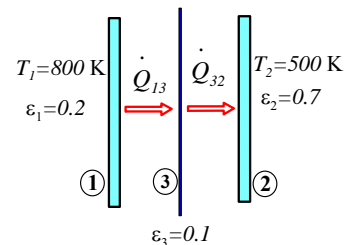
É útil verificar que se as placas se comportam-se como corpos negros, a troca de calor seria muito superior:

$$\dot{Q}_{12,b} = A_1 F_{12} \sigma(T_1^4 - T_2^4) = 1 \times 1 \times 5.67 \times 10^{-8} \times (800^4 - 500^4) = 19\,681 \text{ W.}$$

Exemplo 2 – Efeito de escudo de radiação. Calcular a taxa de transferência de energia radiante do exemplo anterior quando é colocada, entre as duas placas originais, uma nova placa muito fina e altamente reflectora, com emissividade 0.1.

Designamos como placa 3 o escudo de radiação, com emissividade $\varepsilon_3 = 0.1$ e temperatura desconhecida T_3 . A taxa net de radiação entre 1 e 3 terá de ser igual à taxa entre 3 e 2:

$$\dot{Q}_{13} = \dot{Q}_{32} = \dot{Q}_{12} \quad \text{com: } \dot{Q}_{13} = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_3^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1} \quad \text{e} \quad \dot{Q}_{32} = \frac{A\sigma(T_3^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}.$$



Multiplicando ambas pelo respectivo denominador e somando, para eliminar a temperatura da placa intermédia T_3 , temos:

$$\dot{Q}_{12} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1 \right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \right] = A\sigma \left[(T_1^4 - T_3^4) + (T_3^4 - T_2^4) \right]$$

e

$$\dot{Q}_{12} = \frac{A\sigma \left[(T_1^4 - T_2^4) \right]}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + 2\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 2 \right)}$$

Se as três emissividades fossem iguais, o resultado seria metade daquele do Exemplo 1. No caso concreto do enunciado, tem-se:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{1 \times 5.67 \times 10^{-8} \times (800^4 - 500^4)}{\frac{1}{0.2} + \frac{2}{0.1} + \frac{1}{0.7} - 2} = 805.6 \text{ W/m}^2$$

A introdução do escudo de radiação fez diminuir a taxa de energia radiante líquida trocada entre as placas 1 e 2 de 77.8 %.

A temperatura do escudo pode ser obtida de um dos balanços de energia, por exemplo entre as placas 1 e 3:

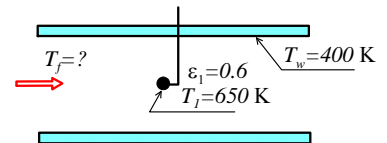
$$\dot{Q}_{13} = \frac{A\sigma (T_1^4 - T_3^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1} \Rightarrow T_3 = \sqrt[4]{T_1^4 - \frac{\dot{Q}_{13}}{A\sigma} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1 \right)} = 677.5 \text{ K.}$$

Verifica-se que a temperatura do painel intermédio é algo superior à média aritmética entre as duas placas originais: $(800+500)/2 = 650 \text{ K}$.

Exemplo 3 – Erro de medição com termopar devido a radiação. Um termopar colocado no centro de uma conduta que transporta gases quentes dá uma medição de 650 K. A temperatura das paredes internas da conduta é uniforme a 400 K, o coeficiente convectivo entre o termopar e os gases é $80 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ e a emissividade do termopar 0.6. Qual a verdadeira temperatura dos gases na conduta?

O balanço de energia aplicado ao termopar (indicado com índice 1) mostra que o ganho de calor por convecção é igual à perda de calor por radiação:

$$\dot{q}_c = \dot{q}_r \Rightarrow h_c A_1 (T_f - T_1) = A_1 F_{12} \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_w^4)$$



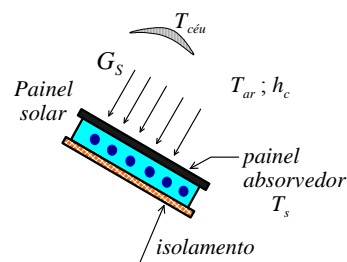
em que T_1 é a temperatura dada pelo termopar, T_f a temperatura do fluido longe do termopar, A_1 a área superficial do termopar e F_{12} o factor de forma entre o termopar e as paredes interiores da conduta, que estão à temperatura T_w . Assumindo que a área interior da conduta é grande comparada com a área do termopar, tem-se $F_{12} = 1$ (toda a radiação saída do termopar incide nas paredes). Do balanço de energia, obtém-se:

$$T_f = T_1 + \frac{\varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_w^4)}{h_c} =$$

$$= 650 + \frac{0.6 \times 5.67 \times 10^{-8} (650^4 - 400^4)}{80} = 650 + 65 = 715 \text{ K.}$$

A perda de calor por radiação entre o termopar (a 377 °C) e a parede da conduta (a 127 °C, logo mais fria), faz com que a temperatura medida seja 65°C inferior à verdadeira (erro de 9.1%).

Exemplo 4 – Painel solar. Num dia claro, um painel solar rectangular com 1,5 m de altura e 3 m de largura, disposto segundo uma certa inclinação relativamente à horizontal, recebe um fluxo de irradiação solar de 600 W/m². O painel é constituído por uma superfície absorvedora, feita de alumínio revestido a crómio negro (absorvidade da radiação solar, $\alpha_s = 0.87$; emissividade a temperatura atmosférica, $\varepsilon = 0.09$). Essa placa absorvedora está em contacto com uma caixa contendo tubos de água que será aquecida, e a parte posterior do painel está isolada. Nesse dia, a temperatura do ar circundante é 25 °C, o coeficiente convectivo é $h = 10 \text{ W/(m}^2 \text{ °C)}$, a temperatura equivalente do céu (para efeitos de radiação) é 15 °C, e a temperatura da superfície da placa absorvedora foi medida, sendo de 60 °C. Calcular o fluxo de calor aproveitado para aquecer a água nos tubos.



Dados:

$$G_s = 600 \text{ W/m}^2$$

$$T_{ar} = 25 \text{ °C} = 298 \text{ K}; T_{céu} = 15 \text{ °C} = 288 \text{ K}; T_s = 60 \text{ °C} = 333 \text{ K}$$

$$h_c = 10 \text{ W/(m}^2 \text{ °C)}$$

Balanco de energia ao painel solar:

$$\dot{q}_{agua} = \dot{q}_{absorvido} - \dot{q}_{emitido} - \dot{q}_{convecção}$$

A parte da irradiação solar absorvida pela placa de crómio negro é:

$$\dot{q}_{absorvido} = \alpha_s G_s = 0.87 \times 600 = 522 \text{ W/m}^2$$

A placa emite para o céu em redor (assume-se que toda a radiação emitida incide no “céu”, ou seja, o factor de forma entre o painel e o espaço circundante é $F_{12} = 1$):

$$\dot{q}_{emitido} = \varepsilon \sigma (T_s^4 - T_{céu}^4) = 0.09 \times 5.67 \times 10^{-8} (333^4 - 288^4) = 27.6 \text{ W/m}^2$$

O fluxo de calor perdido pelo painel por convecção é:

$$\dot{q}_{convecção} = h_c (T_s - T_{ar}) = 10 \times (333 - 298) = 350 \text{ W/m}^2$$

Do balanço de energia, o fluxo recebido pela água é

$$\dot{q}_{agua} = 522 - 27.6 - 350 = 144.4 \text{ W/m}^2$$

e a potência calorífica fornecida à água vem

$$\dot{Q}_{agua} = A_{painel} \dot{q}_{agua} = (1.5 \times 3) \times 144.4 = 650 \text{ W.}$$

Verifica-se que, para este painel, a maior perda de energia é devida à convecção para o ar ambiente.

8.9 Tabelas

Tabela 1 – Fração de energia radiada pelo corpo negro

$$(\lambda T \text{ [}\mu\text{m}\cdot\text{K]}; f_{\lambda} = \left(\int_0^{\lambda} E_{b\lambda'} d\lambda' \right) / E_b)$$

λT	f_{λ}	λT	f_{λ}	λT	f_{λ}	λT	f_{λ}
200.	0.000000	4200.	0.515988	8500.	0.874564	70000.	0.999588
400.	0.000000	4400.	0.548769	9000.	0.889985	80000.	0.999721
600.	0.000000	4600.	0.579252	9500.	0.903041	90000.	0.999803
800.	0.000016	4800.	0.607529	10000.	0.914154	100000.	0.999855
1000.	0.000321	5000.	0.633716	10500.	0.923664		
1200.	0.002134	5200.	0.657938	11000.	0.931843		
1400.	0.007789	5400.	0.680326	11500.	0.938913		
1600.	0.019717	5600.	0.701012	12000.	0.945051		
1800.	0.039339	5800.	0.720123	13000.	0.955092		
2000.	0.066725	6000.	0.737781	14000.	0.962850		
2200.	0.100883	6200.	0.754103	15000.	0.968933		
2400.	0.140249	6400.	0.769196	16000.	0.973766		
2600.	0.183111	6600.	0.783160	17000.	0.977652		
2800.	0.227879	6800.	0.796089	18000.	0.980812		
3000.	0.273218	7000.	0.808068	19000.	0.983405		
3200.	0.318086	7200.	0.819177	20000.	0.985553		
3400.	0.361717	7400.	0.829485	30000.	0.995291		
3600.	0.403587	7600.	0.839061	40000.	0.997918		
3800.	0.443360	7800.	0.847962	50000.	0.998904		
4000.	0.480853	8000.	0.856246	60000.	0.999354		

Capítulo 8 – Radiação

8.10 Exercícios:

- 1) Uma janela quadrada (30 cm x 30 cm) para visualizar o interior de um forno (corpo negro a 2000 °C) é feita com vidro que possui as seguintes propriedades radiativas: transmissividade $\tau = 0.5$ para $0.2\mu\text{m} \leq \lambda \leq 3.5\mu\text{m}$ e $\tau = 0$ fora dessa gama de comprimentos de onda; emissividade $\varepsilon = 0.3$ para $\lambda \leq 3.5\mu\text{m}$, e $\varepsilon = 0.9$ para $\lambda > 3.5\mu\text{m}$. Calcular a potência de radiação absorvida e transmitida pela janela. Resp: 52.8 kW e 58.2 kW.
- 2) Calcular a temperatura de equilíbrio radiativo para placa plana exposta a um fluxo solar de 700 W/m^2 , quando a temperatura do céu envolvente é considerada como 25 °C. Considerar dois acabamentos superficiais: a) pintada com tinta branca, absorvidades solar, $\alpha_s = 0.12$, condições ambientes $\alpha = 0.9$; b) coberta a lacre negro liso, $\alpha_s = 0.96$ e $\alpha = 0.95$. Resp: 39.5 °C, 104.7 °C.
- 3) Radiação solar a incidir em nave espacial. Para um fluxo de radiação solar de 1320 W/m^2 , calcular a temperatura da superfície da nave, assumindo equilíbrio térmico, para um revestimento com absorvidade da radiação solar $\alpha_s = 0.10$ e emissividade a temperaturas ambientes $\varepsilon = 0.80$. A temperatura equivalente do céu é 0 K. Resp: -40.7 °C.
- 4) Erro de medição de termopar. Calcular a verdadeira temperatura dum gás quente que flui numa conduta, quando a medição do termopar é 650 K e as paredes interiores da conduta estão a 400 K. O coeficiente convectivo é $80 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ e a emissividade do material do termopar 0.60. Resp: 715 K.
- 5) Temperatura do céu à noite. A água superficial de um lago congelou durante a noite, quando a temperatura ambiente foi medida a 4 °C. Assumindo um coeficiente convectivo de $10 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ (condições sem vento), obter a temperatura equivalente do céu. Resp: -9.6 °C (emissividade do gelo 0.95).
- 6) Painel solar. O fluxo de radiação solar sobre um painel plano (1.5 m x 3 m) é $G_s = 600 \text{ W/m}^2$, para uma temperatura do ar ambiente de 25 °C, um coeficiente convectivo de $10 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ e uma temperatura do céu 15 °C. Considerando que a superfície absorvedora do painel é de alumínio revestido com crómio negro ($\alpha_s = 0.87$, $\varepsilon = 0.09$), e que a sua temperatura foi medida a 70 °C, calcular a potência calorífica transferida para a água quente. Nota: a água circula em tubos inseridos na caixa do painel, imediatamente sob a superfície absorvedora, e assume-se que a base do painel está perfeitamente isolada. Resp: 164 W.
- 7) Repetir o problema anterior, mas assumindo agora que não há calor transferido para a água (placa absorvedora perfeitamente isolada). Calcular a temperatura da superfície. Resp: 73.4 °C.
- 8) Uma superfície está à temperatura 350 K ao receber 400 W/m^2 de radiação solar difusa e 350 W/m^2 de radiação directa a um ângulo de 30° relativamente à normal. A absorvidade do material é 0.85 para a radiação solar e a emissividade em condições ambientes é 0.5. Calcular a taxa líquida de radiação recebida pela superfície, considerando uma temperatura efectiva para o céu de 280 K. Resp: 346.5 W/m^2 .
- 9) Uma fornalha semi-esférica, com diâmetro 5 m, tem a cúpula negra à temperatura 1000 K e a base plana é cinzenta (emissividade 0.7) estando à

- temperatura 400 K. Qual o calor líquido transferido por radiação da cúpula para a base? Resp: 759 kW.
- 10) Um tanque esférico (diâmetro 2 m) contém nitrogénio líquido à temperatura de 100 K e está colocado no centro de um compartimento de dimensões 3 m x 3 m x 3 m cujas paredes estão a 240 K. A emissividade do material do tanque é 0.1 e a das paredes 0.8. Qual o calor líquido recebido por radiação pelo tanque? Resp: 228 W.
 - 11) Repetir o problema anterior se o compartimento envolvente for esférico com diâmetro 3 m. Resp: 227 W.
 - 12) Dois discos negros colocados paralelamente em frente um do outro (diâmetro 60 cm; separação 40 cm), ambos a 700 K e com a face posterior isolada, radiam para o espaço envolvente a 300 K. Calcular a taxa de radiação líquida entre os dois discos e o ambiente. Resp: 5308 W.
 - 13) Uma fornalha tem uma forma cúbica com lado 4 m. O tecto está à temperatura 1100 K e o chão a 550 K. Considerando que essas superfícies são negras, e que as 4 paredes laterais são reflectores ideais (re-irradiam toda a radiação recebida), calcular o taxa de calor por radiação para o chão. Resp: 747 kW.
 - 14) Uma fornalha cilíndrica (raio 2 m, altura 2 m) tem a base a 1400 K, o tecto a 700 K e a parede circular lateral a 500 K. Assumindo que as superfícies se comportam como corpos negros, calcular a taxa de calor por radiação para o tecto. Resp: 902 kW.
 - 15) Uma fornalha muito comprida, com secção triangular equilátera (base 2 m) emite uma taxa de calor pela base igual a 800 W/ por m de comprimento (emissividade 0.8) e as duas superfícies superiores estão a 500 K (emissividades 0.5). Calcular a temperatura da base. Resp: 523 K.
 - 16) Calcular a taxa de transferência de calor por radiação entre dois tubos cilíndricos compridos (diâmetro 20 cm, distância entre eixos 30 cm), com superfícies negras a 425 K e 275 K, quando o ambiente envolvente está a 300 K. Obter ainda o calor radiado para o ambiente. Resp: 92.4 W/m; 1411 W/m.
 - 17) Emissividade de superfície selectiva. A superfície de um material está a 1000 K e apresenta uma emissividade espectral de 0.7 entre os comprimentos de onda 2 e 6 microns, 0.4 para comprimentos de onda menores e 0.3 para comprimentos de onda maiores. Calcular a sua emissividade média hemisférica e a energia emitida por radiação. Resp: 0.5751, 32w2.6 kW/m².