

## Transmissão de Calor – Condução em Regime Variável

P.J. Oliveira

Departamento Engenharia Electromecânica, UBI,

Outubro 2014

Em muitos problemas de interesse prático a transferência de calor é feita em regime variável, o que significa que o campo de temperaturas irá variar ao longo do tempo. Por exemplo, o arrefecimento de um bloco de metal quando submergido num líquido mais frio (processos de tratamento térmico, como a têmpera do metal); o aquecimento de um produto alimentar qualquer (lata de refrigerante) retirado do frigorífico e exposto ao ar ambiente; em anatomia forense, a determinação do instante da morte pela temperatura de um cadáver.

Vamos considerar duas situações:

- 1) **Temperatura uniforme** (o corpo é caracterizado por um único valor de temperatura, ou seja, a temperatura é independente da variável espacial e só varia com o tempo);
- 2) **Temperatura não uniforme**, varia dentro do corpo em análise:
  - Placa plana infinita;
  - Cilindro infinito;
  - Esfera;
  - Corpo semi-infinito.

A primeira situação, de temperatura uniforme, é só aproximada e, para que se verifique, é necessário que a condução de calor no interior do corpo (sólido ou fluido) se faça rapidamente, em comparação com a convecção entre a superfície do corpo e o fluido envolvente. Isto requer um **número de Biot** pequeno:

$$Bi = \frac{hL_c}{k} < 0.1$$

O número de Biot é um parâmetro adimensional que mede a importância da convecção (coeficiente convectivo  $h$  [W/m<sup>2</sup> °C]) relativamente à condução (condutibilidade térmica  $k$  [W/m °C]) a dividir por um comprimento característico do corpo,  $L_c$ ).

Portanto:

$$Bi = \frac{\text{fluxo convectivo com exterior}}{\text{fluxo difusivo}} = \frac{h\Delta T}{k \frac{\Delta T}{L_c}} = \frac{hL_c}{k}$$

Outra forma de interpretar o número de Biot é considerá-lo como a razão entre a resistência térmica à condução de calor no interior do corpo, e a resistência térmica convectiva na sua superfície:

$$Bi = \frac{\text{resistencia da condução}}{\text{resistencia convectiva}} = \frac{R_{t,cond}}{R_{t,conv}} = \frac{\frac{L_c}{Ak}}{\frac{1}{Ah}} = \frac{hL_c}{k}$$

Se a resistência térmica da condução no interior do corpo for pequena, este fica rapidamente em equilíbrio térmico a uma temperatura uniforme (igual em todos os pontos), quando é aquecido (ou arrefecido) por convecção na superfície exterior. O número de Biot é pequeno para corpos de pequena dimensão, feitos de material com

condutibilidade térmica elevada (metais, sólidos bons condutores, etc), e quando o coeficiente convectivo é baixo (convecção natural; o fluido exterior é um gás).

### 1) Análise uniforme

O balanço de energia para um corpo de massa  $m$ , volume  $V$  e área superficial  $A_s$  escreve-se:

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q}_{c,ext} \Rightarrow \frac{d[mc_p(T - T_{ref})]}{dt} = A_s h (T_\infty - T) \Rightarrow mc_p \frac{dT}{dt} = -A_s h (T - T_\infty)$$

Esta equação diz que o aumento da energia interna do corpo, ao longo do tempo, é devido ao fluxo de calor recebido por convecção através da sua superfície exterior (que o separa do fluido envolvente, à temperatura  $T_\infty$ ). Considera-se que a massa do corpo e a sua capacidade térmica mássica a pressão constante  $c_p$  são constantes.

A equação diferencial anterior pode escrever-se de forma mais compacta como:

$$\frac{dT'}{dt} = -\frac{A_s h}{mc_p} T' = -b T'$$

com  $T' = T - T_\infty$  e  $b = \frac{A_s h}{mc_p} = \frac{A_s h}{\rho V c_p} \text{ [s}^{-1}\text{]}$

ou

$$t_c = \frac{1}{b} = \frac{\rho V c_p}{A_s h} \text{ [s]} \quad (\text{tempo característico ou tempo de relaxação}).$$

A solução geral desta equação corresponde a um decaimento exponencial da temperatura:

$$T' = C e^{-t/t_c}$$

Aplicando a condição inicial de  $T = T_i$  para  $t = 0$  ( $T_i$  = temperatura inicial, uniforme, do corpo), a solução particular é:

$$\theta \equiv \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-t/t_c} = e^{-bt}$$

Para escrever esta equação de forma adimensional, define-se primeiramente a **dimensão característica** do corpo como o volume a dividir pela área superficial,

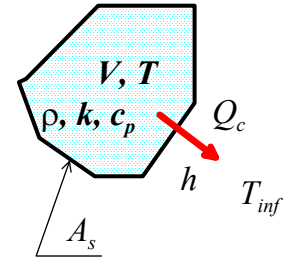
$$L_c = \frac{V}{A_s} \text{ [m]}$$

e introduz-se uma escala de tempo difusiva, igual a  $L_c^2 / \alpha$  [s], em que  $\alpha = k / (\rho c_p)$  [m<sup>2</sup>/s] é o coeficiente de difusão de calor (a difusividade térmica). O **tempo adimensional** fica

$$\tau = \frac{\alpha t}{L_c^2}$$

sendo por vezes designado como **número de Fourier**:

$$Fo = \tau \equiv \frac{\alpha t}{L_c^2} \quad (\text{não tem dimensões}).$$



O resultado final, escrito de forma adimensional, é:

$$\theta = e^{-\tau/\tau_c}$$

com

$$\tau_c = \frac{\alpha t_c}{L_c^2}.$$

Pode ser útil relacionar o tempo característico adimensional com o número de Biot:

$$t_c = \frac{\rho V c_p}{A_s h} = \frac{\rho L_c c_p}{h} = \frac{\rho L_c c_p}{h} \frac{k L_c}{k L_c} = \frac{L_c^2}{\alpha (h L_c / k)} = \frac{L_c^2}{\alpha Bi}$$

ou

$$\tau_c = \frac{t_c}{L_c^2 / \alpha} = \frac{1}{Bi} \Rightarrow \tau_c = \frac{1}{Bi}$$

Logo, a **solução adimensional** pode também escrever-se como

$$\theta = \exp(-Bi \times Fo)$$

Interpretação física do **número de Fourier** (que no fundo não é mais que um tempo adimensional):

$$Fo = \frac{\text{taxa de calor transferido por condução}}{\text{calor acumulado no corpo por unidade tempo}} = \frac{k A \Delta T / L_c}{\rho V c_p \Delta T / t} = \frac{\alpha t}{L_c^2}$$

Corpos pequenos de material com capacidade térmica baixa e condutibilidade elevada, irão ter tendência para apresentar um número de Fourier elevado. Só no estágio inicial do processo de arrefecimento (ou aquecimento) é que o  $Fo$  será baixo.

## 2) Análise não uniforme

Neste caso a análise matemática do arrefecimento do corpo por convecção na superfície exterior só é possível para corpos com forma simples: (i) parede plana de espessura  $2L$ ; (ii) cilindro infinito de raio  $R$ ; (iii) esfera de raio  $R$ ; (iv) corpo semi-infinito. Mesmo assim, a solução analítica é complicada (séries infinitas de funções transcendentais, que se escrevem, de forma sintética,  $\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \tau}$ ) e por isso na prática usam-se gráficos

que dão a solução em termos do número de Biot e do número de Fourier (ver **gráficos de Heisler em Anexo**). É possível, no entanto, como primeira aproximação considerar unicamente o primeiro termo dessas séries, quando o número de Fourier não é pequeno. Na prática, esta aproximação é válida desde que  $\tau \equiv Fo > 0.2$ .

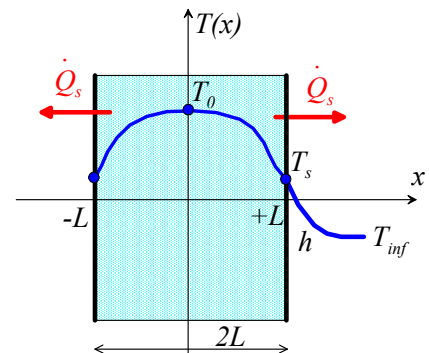
### i- Placa plana infinita, meia espessura $L$

Aproximação para o perfil de temperatura:

$$\theta(x, \tau) \equiv \frac{T(x, \tau) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos(\lambda_1 x / L)$$

Os valores das constantes  $A_1$  e  $\lambda_1$  são dadas na **Tabela 1**, em função do número de Biot,  $Bi = hL / k$ .

Temperatura no plano central ( $x = 0$ ), com  $\tau = \alpha t / L^2$ :



$$\theta_0(\tau) \equiv \frac{T_0(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

Temperatura na superfície ( $x = L$ ):

$$\theta_s(\tau) \equiv \frac{T_s(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos \lambda_1 \quad \text{ou} \quad \theta_s = \theta_0 \cos \lambda_1$$

Calor transferido pela superfície (os dois planos laterais), por unidade de área da parede, desde o instante inicial até um instante qualquer  $\tau = \alpha t / L^2$ :

$$\frac{Q(\tau)}{Q_{\max}} = 1 - \theta_0 \frac{\sin \lambda_1}{\lambda_1}$$

em que  $Q_{\max} = \rho c_p L |T_i - T_\infty|$  é o calor máximo passível de ser transferido de, ou para, a placa (por unidade de área).

## ii- Cilindro infinito, raio $R$

Aproximação para o perfil de temperatura:

$$\theta(r, \tau) \equiv \frac{T(r, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} J_0(\lambda_1 r / R)$$

Os valores das constantes  $A_1$  e  $\lambda_1$  são dadas na **Tabela 1**, em função do número de Biot,  $Bi = hR / k$  e  $J_0(x)$  é uma função de Bessel, cujos valores são dados na **Tabela 2**.

Temperatura no eixo ( $r = 0$ ), com  $\tau = \alpha t / R^2$ :

$$\theta_0(\tau) \equiv \frac{T_0(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

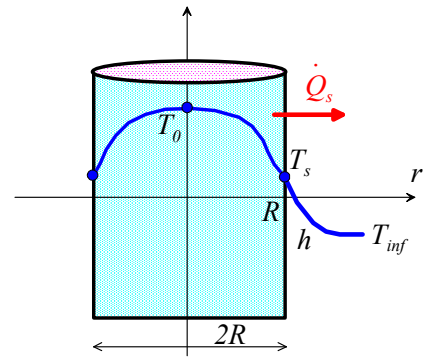
Temperatura na superfície ( $r = R$ ):

$$\theta_s(\tau) \equiv \frac{T_s(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} J_0(\lambda_1) \quad \text{ou} \quad \theta_s = \theta_0 J_0(\lambda_1)$$

Calor transferido pela superfície, por metro de comprimento do cilindro, desde o instante inicial até um instante qualquer  $\tau = \alpha t / R^2$ :

$$\frac{Q(\tau)}{Q_{\max}} = 1 - 2\theta_0 \frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1}$$

em que  $Q_{\max} = \rho c_p \pi R^2 |T_i - T_\infty|$  é o calor máximo que o cilindro pode ceder ou receber do exterior a  $T_\infty$  (por unidade de comprimento do cilindro).



## iii- Esfera, raio $R$

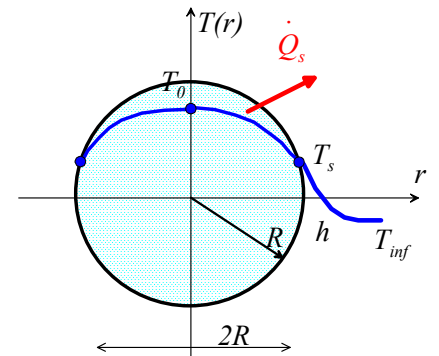
Aproximação para o perfil de temperatura:

$$\theta(r, \tau) \equiv \frac{T(r, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \frac{1}{\lambda_1 r / R} \sin(\lambda_1 r / R)$$

Os valores das constantes  $A_1$  e  $\lambda_1$  são dadas na **Tabela 1**, em função do número de Biot,  $Bi = hR / k$ .

Temperatura no centro ( $r = 0$ ), com  $\tau = \alpha t / R^2$ :

$$\theta_0(\tau) \equiv \frac{T_0(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$



Temperatura na superfície ( $r = R$ ):

$$\theta_s(\tau) \equiv \frac{T_s(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \frac{\sin \lambda_1}{\lambda_1} \quad \text{ou} \quad \theta_s = \theta_0 \frac{\sin \lambda_1}{\lambda_1}$$

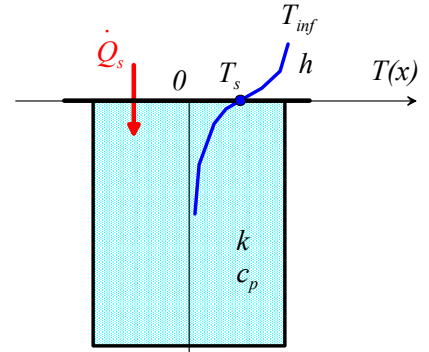
Calor transferido pela superfície da esfera, desde o instante inicial até um instante qualquer  $\tau = \alpha t / R^2$ :

$$\frac{Q(\tau)}{Q_{\max}} = 1 - 3\theta_0 \frac{\sin \lambda_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1}{\lambda_1^3}$$

em que  $Q_{\max} = \rho c_p \frac{4}{3} \pi R^3 |T_i - T_\infty|$  é o calor máximo que a esfera pode ceder ou receber na presença de um ambiente a  $T_\infty$ .

#### iv- Corpo semi-infinito

Um corpo de grandes dimensões está inicialmente a temperatura uniforme  $T_i$  e, no instante inicial  $t = 0$ , é aquecido (ou arrefecido) na superfície exposta ( $x = 0$ ) por convecção com um fluido exterior à temperatura  $T_\infty$ . A coordenada espacial  $x$  aponta da superfície para o interior do corpo. O material do corpo tem condutibilidade térmica  $k$ , capacidade térmica mássica  $c_p$ , massa volúmica  $\rho$  e difusividade térmica  $\alpha = k / \rho c_p$ ; o coeficiente convectivo exterior é  $h$ .



A variação de temperatura no corpo, ao longo do tempo, é dada por:

$$\theta(x, t) \equiv \frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}\right) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)$$

Nesta equação  $\text{erfc}(x)$  representa a função complementar erro, dada na **Tabela 3**. Em vez de se usar esta expressão analítica, pode obter-se a temperatura do gráfico dado em **Anexo**. Nesse gráfico  $\theta$  é representado em função dos parâmetros adimensionais:

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \quad (\text{distância } x \text{ adimensionalizada com a profundidade de penetração do calor } L_t = \sqrt{\alpha t})$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} \quad (\text{um número de Biot } hL_t / k \text{ baseado na profundidade de penetração do calor } L_t = \sqrt{\alpha t})$$

Repare-se também que a presente definição da temperatura adimensional está relacionada com a utilizada acima, para a placa plana, por:

$$\theta(x, t) = \frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

No caso em que o aquecimento superficial se faz especificando a temperatura da superfície ( $T_s = T(x = 0)$ ), o que é equivalente a fazer  $h = \infty$  e  $T_\infty = T_s$  na expressão anterior, esta simplifica-se para:

$$\theta(x, t) \equiv \frac{T(x, t) - T_i}{T_s - T_i} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

e o fluxo de calor na superfície, obtido pela lei de Fourier, fica:

$$\dot{q}_s(t) \equiv \dot{q}(x=0, t) = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}.$$

### Princípio da sobreposição

Geometrias mais complexas e realistas, que possam ser vistas como compostas por vários casos sobrepostos correspondentes às situações mais simples tratadas de i a iv, são resolvidas recorrendo ao princípio da sobreposição. Como os problemas de condução de calor aqui analisados são lineares, a solução de um caso mais complicado é dada pelo produto das soluções de base, desde que a soma das condições de fronteira destas seja igual às condições de fronteira do problema complicado.

Isto entende-se melhor com alguns exemplos. A solução do problema de condução de calor num paralelepípedo de meia largura  $L_x$  segundo  $x$ ,  $L_y$  segundo  $y$  e  $L_z$  segundo  $z$  (o volume é  $2L_x \times 2L_y \times 2L_z$ ), com convecção através da superfície exterior para um fluido envolvente a  $T_\infty$  e coeficiente uniforme  $h$ , será dada por:

$$\theta(x, y, z, t) = \theta_{placa\ 2L_x}(x, \tau) \times \theta_{placa\ 2L_y}(y, \tau) \times \theta_{placa\ 2L_z}(z, \tau)$$

A solução para cada “placa infinita”  $\theta_{placa}(x_i, \tau)$  é dada pelos resultados da Secção i.

Outro exemplo: arrefecimento de um corpo cilíndrico de altura  $H$ , comparável com o raio  $R$  (isto é, o cilindro não é infinito). A solução é o produto do resultado para cilindro infinito  $\theta_{cilind\ R}(r, \tau)$  (Secção ii) e o resultado para placa plana infinita com separação

$$2L_z = H, \theta_{placa\ 2L_z}(z, \tau):$$

$$\theta(r, z, t) = \theta_{cilind\ R}(r, \tau) \times \theta_{placa\ 2L_z}(z, \tau).$$

Esta técnica permite obter soluções bi e tridimensionais baseadas nas soluções “simples” unidimensionais dadas atrás.

**Exemplo 1 – Análise de estado uniforme.** Uma esfera de aço de 5 cm de diâmetro está inicialmente à temperatura uniforme de 450 °C e é subitamente colocada num ambiente a 100 °C. Calcular o tempo necessário para a temperatura da esfera baixar para 150°C. Dados: aço,  $k = 35\text{ W/(m K)}$ ,  $\rho = 7800\text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 0.46\text{ kJ/(kg °C)}$ ; coeficiente convectivo  $h = 10\text{ W/(m}^2\text{ °C)}$ .

Para se verificar se a análise de corpo uniforme pode ser aplicada, calcula-se o número de Biot:

$$Bi = \frac{hL_c}{k}$$

A dimensão característica é

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3} = \frac{5/2}{3} = 0.833\text{ cm}$$

logo

$$Bi = \frac{10 \times 0.00833}{35} = 0.00238$$

Como  $Bi \ll 1$  conclui-se que é perfeitamente razoável assumir temperatura uniforme no seio da esfera de aço. Para uma temperatura final de  $T = 150^\circ\text{C}$ , a temperatura adimensional é:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{150 - 100}{450 - 100} = 0.1428$$

e o tempo adimensional decorrido obtém-se por inversão da solução analítica

$$\theta = e^{-\tau/\tau_c} \Rightarrow \tau = -\tau_c \ln \theta = -\ln(0.1428) / 0.00238 = 817.3$$

em que se usa o facto do tempo de relaxação adimensional  $\tau_c$  ser igual ao inverso do número de Biot,  $Bi$ . A difusividade térmica do aço é dada por

$$\alpha = k / \rho c_p = 35 / 7800 \times 460 = 9.75 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

e o tempo dimensional (em segundos) vem:

$$t = \tau L_c^2 / \alpha = \frac{817.3 \times 0.00833^2}{9.75 \times 10^{-6}} = 5814 \text{ s}$$

ou seja,  $t = 5814 / 3600 = 1.61 \text{ h}$ . Conclusão: a esfera de aço, inicialmente a  $450^\circ\text{C}$ , só ao fim de 1 h e 37 min arrefece até ficar a  $150^\circ\text{C}$ .

**Exemplo 2** – Uma pessoa é encontrada morta às 17h, sendo a sua temperatura medida de  $25^\circ\text{C}$ . Considerando que o ar ambiente está a  $20^\circ\text{C}$ , que o coeficiente de transmissão de calor é aproximadamente  $8 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ }^\circ\text{C})$  e que a temperatura normal dum corpo vivo é  $37^\circ\text{C}$ , estimar a hora da morte. As propriedades físicas de corpo humano podem ser aproximadas pelas da água ( $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $k = 0.608 \text{ W}/(\text{m K})$ ,  $c_p = 4.18 \text{ kJ}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ ) e a geometria do corpo idealizada como um cilindro de altura 1.70 m e diâmetro 30 cm.

Assumindo análise uniforme, o comprimento característico é:

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\pi R^2 H}{2\pi R^2 + 2\pi RH} = \frac{R}{2(R/H + 1)} = 0.0689 \text{ m}$$

para uma altura do cilindro equivalente  $H = 1.70 \text{ m}$  e raio  $R = 0.15 \text{ m}$ . O correspondente número de Biot vem

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{8 \times 0.0689}{0.608} = 0.907$$

Constata-se que o número de Biot é superior a 0.1 e por isso a análise uniforme não pode, em princípio, ser aplicada. Mesmo assim, vamos usá-la para obter uma aproximação da hora da morte, mesmo que grosseira. A temperatura final adimensional é:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{25 - 20}{37 - 20} = 0.2941$$

e o tempo adimensional

$$\tau = -\tau_c \ln \theta = -\ln(0.2941) / 0.907 = 1.349$$

O tempo real será portanto, com  $\alpha = k / \rho c_p = 0.608 / 1000 / 4180 = 1.454 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ,

$$t = \tau L_c^2 / \alpha = \frac{1.345 \times 0.0689^2}{1.454 \times 10^{-7}} = 44\,068 \text{ s}$$

ou seja, o tempo decorrido foi 12.24 h. Logo a hora da morte teria sido às 4.8 h da manhã.

Este cálculo é agora confirmado com o método da análise não uniforme, em que se faz a aproximação de cilindro infinito. O número de Biot é baseado no raio do cilindro:

$$Bi = \frac{hR}{k} = \frac{8 \times 0.15}{0.608} = 1.974$$

Para este valor de  $Bi$ , a Tabela 1 fornece as constantes  $\lambda_1 = 1.5995$  e  $A_1 = 1.3384$ . A temperatura no centro do cilindro é dada por

$$\theta_0(\tau) = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{25 - 20}{37 - 20} = 0.2941 = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

logo

$$\tau = -\ln(\theta_0 / A_1) / \lambda_1^2 \quad \tau = -\ln(0.2941 / 1.3384) / 1.5995^2 = 0.5923$$

superior a 0.2, e o tempo dimensional

$$t = \tau R^2 / \alpha = \frac{0.5923 \times 0.15^2}{1.454 \times 10^{-7}} = 91\,650 \text{ s}$$

ou seja,  $t = 25.4$  h. Esta análise resulta num intervalo de tempo muito mais longo, que colocaria a hora da morte nas 15.5 h do dia anterior.

**Exemplo 3** – Aquecimento de lata de cerveja por convecção natural. A lata é considerada como um cilindro de dimensões 15 cm (altura) e 5.5 cm (diâmetro), foi retirada do frigorífico à temperatura uniforme de 5 °C, o ar ambiente está a 25 °C e o coeficiente de transmissão de calor, combinando convecção e radiação, é 10 W/(m<sup>2</sup> °C). As propriedades físicas da cerveja são assumidas como idênticas às da água, massa volumica 1000 kg/m<sup>3</sup>, condutibilidade térmica 0.61 W/(m °C) e capacidade térmica mássica a pressão constante 4180 J/(kg °C). A lata é pousada em cima de uma mesa, não havendo transferência de calor através da base (uma aproximação), e pretende-se saber a temperatura no centro e superfície da base do cilindro, e no centro do topo, após 30 minutos.

Para um raio da base de  $R = D/2 = 5.5/2 = 2.75$  cm, o volume do cilindro é  $V = \pi R^2 H = \pi \times 2.75^2 \times 15 = 356 \text{ cm}^3$ , ou mL, uma capacidade semelhante à esperada (33 cL), embora um pouco superior, como seria desejável. Vamos fazer a análise com graus sucessivos de aproximação.

1º) Assumindo que a temperatura da cerveja dentro da lata é uniforme (análise uniforme), a temperatura adimensional será dada pela variação exponencial  $\theta = \exp(-\tau / \tau_c)$ . Para que esta aproximação seja válida o número de Biot tem de ser inferior a 0.1. Assumindo que a troca de calor se dá unicamente pela superfície lateral do cilindro e pelo topo com forma circular (uma vez que a base está isolada), a dimensão característica é:

$$L_c = V / A_s = (\pi R^2 H) / (2\pi RH + \pi R^2) = 356.4 / (259.2 + 23.8) = 1.260 \text{ cm}$$

e o número de Biot é calculado como:

$$Bi = hL_c / k = 10 \times 0.01260 / 0.61 = 0.2065$$

Verifica-se ser superior a 0.1, pelo que a análise uniforme deverá ser vista como uma aproximação que pode ser grosseira. A difusividade térmica da cerveja é

$$\alpha = k / (\rho c_p) = 0.61 / (1000 \times 4180) = 1.459 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

e para um tempo de 30 minutos, ou seja  $t = 30 \times 60 = 1800$  s, o tempo adimensional vem

$$\tau = \alpha t / L_c^2 = 1.459 \times 10^{-7} \times 1800 / 0.01260^2 = 1.656$$

enquanto o tempo adimensional característico é dado pelo inverso do número de Biot,

$$\tau_c = 1 / Bi = 1 / 0.2065 = 4.843$$



Assim, a temperatura adimensional, ao fim de 30 minutos, é

$$\theta = \exp(-\tau / \tau_c) = \exp(-1.656 / 4.843) = 0.7104$$

e a temperatura dimensional (em todos os pontos da lata):

$$T = T_\infty + \theta(T_i - T_\infty) = 25 - 20 \times 0.7104 = 10.8 \text{ }^\circ\text{C}.$$

2º) Como na aproximação anterior o número de Biot é superior a 0.1, numa tentativa de melhoras a aproximação considera-se agora a lata como se fosse um cilindro infinito. A dimensão característica da lata é dada pelo seu raio  $R = 2.75 \text{ cm}$  e o número de Biot é agora definido como

$$Bi = hR / k = 10 \times 0.0275 / 0.61 = 0.4508$$

Para este valor, os coeficientes da solução (Tabela 1 para cilindro) são dados por:

$$\lambda_1 = 0.89693 \text{ e } A_1 = 1.10387$$

e a tempo adimensional para 30 minutos

$$\tau = \alpha t / R^2 = 1.459 \times 10^{-7} \times 1800 / 0.0275^2 = 0.3473.$$

Como este tempo é superior a 0.2, torna-se permissível fazer a aproximação tratada acima (série infinita aproximada pelo primeiro termo). Neste caso, a temperatura adimensional no eixo é dada por

$$\theta_0 = A_1 \exp(-\lambda_1^2 \tau) = 1.10387 \times \exp(-0.8969^2 \times 0.3473) = 0.83476$$

e o correspondente valor em graus Celsius

$$T_0 = T_\infty + \theta_0(T_i - T_\infty) = 25 - 20 \times 0.83476 = 8.30 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Repare-se que este valor para a temperatura no centro da base (igual à temperatura no eixo do cilindro, uma vez que o cilindro é infinito) é superior ao obtido pelo método anterior: ao se assumir temperatura uniforme, o aquecimento é mais rápido.

A temperatura na superfície do cilindro é calculada pela fórmula

$$\theta_s = \theta_0 \times J_0(\lambda_1)$$

com, da Tabela 2,

$$J_0(0.89693) = 0.80869$$

o que dá

$$\theta_s = 0.83476 \times 0.80869 = 0.6751$$

ou seja,

$$T_s = T_\infty + \theta_s(T_i - T_\infty) = 25 - 20 \times 0.6751 = 11.5 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Como seria de esperar, a temperatura na superfície exterior do cilindro (da lata) é superior à temperatura no centro (aquece mais depressa). Além disso, existe uma variação significativa entre as duas,  $11.5 - 8.3 = 3.2 \text{ }^\circ\text{C}$  (38% da temperatura central), mostrando de alguma forma o erro cometido pela análise anterior (temperatura uniforme).

3º) Cilindro finito, dado pela intersecção da solução para cilindro infinito com a solução para placa plana separada por meia espessura 15 cm (uma vez que o plano central tem  $q=0$ ). Nesta situação, para placa plana, o comprimento característico é  $L = H = 15 \text{ cm}$ . O número de Biot vem

$$Bi = hH / k = 10 \times 0.15 / 0.61 = 2.459$$

bastante superior a 0.1, e o tempo adimensional

$$\tau = \alpha t / H^2 = 1.459 \times 10^{-7} \times 1800 / 0.15^2 = 0.01167$$

muito inferior a 0.2, o que causa problemas. Para um valor tão baixo do tempo adimensional não se espera que a série tenha convergido quando esta é representada unicamente pelo primeiro termo. De facto, para  $Bi = 2.459$  a Tabela 1 dá os coeficientes

$\lambda_1 = 1.1300$  e  $A_1 = 1.1930$ , que fornecem um valor da temperatura no centro da placa plana de:

$$\theta_0 = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} = 1.1930 \exp(-1.1300^2 \times 0.01167) = 1.175$$

Este valor é superior a 1 e por isso não pode estar certo. Como o tempo adimensional é muito inferior a 0.2, torna-se necessário usar mais termos da série infinita que dá a solução. Esse cálculo não é possível com os conhecimentos disponíveis, mas com base na solução analítica resulta nos valores dados na seguinte tabela:

$n =$	$\lambda_n$	$A_n$	$\theta_{0,placa}$
1	1.1375	+1.1953	1.1774
2	3.7250	-0.2633	0.9535
3	6.6380	-0.09977	1.0131
4	9.6737	-0.04971	0.9965
5	12.757	+0.02925	1.0008
6	15.862	-0.01913	0.9998

A temperatura central da placa plana infinita é portanto muito perto de 1.0. Desta forma, a solução no ponto central do problema tridimensional, dado pela intersecção da solução para o cilindro infinito e a solução para a placa plana, é:

$$\theta_0 = \theta_{0,placa} \times \theta_{0,cil} = 1.000 \times 0.83476 = 0.83476$$

ou seja,

$$T_0 = 25 - \theta_0 \times 20 = 25 - 0.83476 \times 20 = 8.30 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Na superfície da lata, sobre a mesa, tem-se

$$\theta_s = \theta_{0,placa} \times \theta_{s,cil} = 1.000 \times 0.6751 = 0.6751$$

o que dá

$$T_s = 25 - \theta_s \times 20 = 25 - 0.6751 \times 20 = 11.5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

No topo da lata, no seu centro, tem-se

$$\theta_t = \theta_{s,placa} \times \theta_{o,cil}$$

em que a temperatura na superfície da placa plana, com base na 1ª aproximação, é

$$\theta_{s,placa} = \theta_{o,placa} \times \cos \lambda_{1,placa} = 1.000 \times \cos 1.1375 = 0.4199$$

Este valor é baseado num único termo da série, o que estará claramente em erro para este caso. Fazendo o cálculo mais correcto (não possível aqui), dá

$$\theta_{s,placa} = 0.7588$$

e por isso

$$\theta_t = 0.7588 \times 0.83476 = 0.6334$$

ou seja

$$T_t = 25 - \theta_t \times 20 = 25 - 0.6334 \times 20 = 12.3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Conclui-se que passado 30 minutos, a lata de cerveja retirada do frigorífico a 5°C, e exposta ao ar a 25 °C, tem o centro da base (pousada na mesa, sem perda de calor) a 8.3 °C, a superfície da lata nesse plano (junto à mesa) é um pouco superior, 11.5 °C, e o centro do topo da lata está um pouco mais quente, a 12.3 °C.

**Tabela 1 – Coeficientes do 1º termo da série que dá a solução analítica para a transferência de calor por convecção de placa plana infinita, cilindro infinito e esfera.**

Bi	<i>Placa plana</i>		<i>Cilindro infinito</i>		<i>Esfera</i>	
	$\lambda_1$	$A_1$	$\lambda_1$	$A_1$	$\lambda_1$	$A_1$
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.1	0.3111	1.0161	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.2	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.3	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0931	1.0528	1.1164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0184	1.1345	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0918	1.0873	1.1539	1.3525	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1724	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1785	1.5995	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7202
5.0	1.3138	1.2403	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8673
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8920
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2880	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
$\infty$	1.5708	1.2732	2.4048	1.6021	3.1416	2.0000

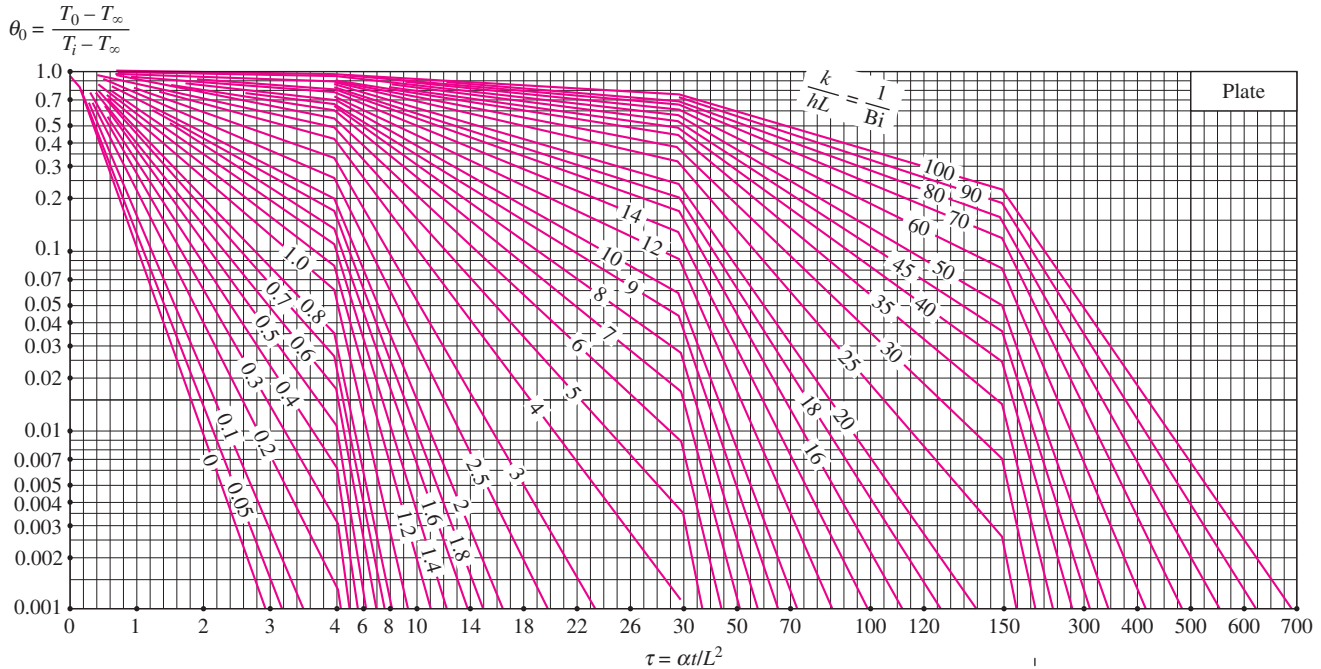
**Tabela 2 – Funções de Bessel de 1ª espécie, de ordem 0 e 1.**

$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000	1.5	0.5118	0.5579
0.1	0.9975	0.0499	1.6	0.4554	0.5699
0.2	0.9900	0.0995	1.7	0.3980	0.5778
0.3	0.9776	0.1483	1.8	0.3400	0.5815
0.4	0.9604	0.1960	1.9	0.2818	0.5812
0.5	0.9385	0.2423	2.0	0.2239	0.5767
0.6	0.9120	0.2867	2.1	0.1666	0.5683
0.7	0.8812	0.3290	2.2	0.1104	0.5560
0.8	0.8463	0.3688	2.3	0.0555	0.5399
0.9	0.8075	0.4059	2.4	0.0025	0.5202
1.0	0.7652	0.4400	2.6	-0.0968	-0.4708
1.1	0.7196	0.4709	2.8	-0.1850	-0.4097
1.2	0.6711	0.4983	3.0	-0.2601	-0.3391
1.3	0.6201	0.5220	3.2	-0.3202	-0.2613
1.4	0.5669	0.5419			

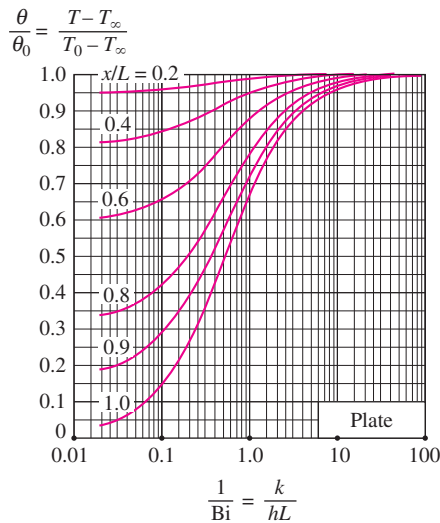
**Tabela 3 – Função erro complementar ( $\text{erfc}(x) = 1.0 - \text{erf}(x)$ ).**

$\eta$	$\text{erfc}(\eta)$	$\eta$	$\text{erfc}(\eta)$	$\eta$	$\text{erfc}(\eta)$	$\eta$	$\text{erfc}(\eta)$	$\eta$	$\text{erfc}(\eta)$	$\eta$	$\text{erfc}(\eta)$
0.00	1.00000	0.38	0.5910	0.76	0.2825	1.14	0.1069	1.52	0.03159	1.90	0.00721
0.02	0.9774	0.40	0.5716	0.78	0.2700	1.16	0.10090	1.54	0.02941	1.92	0.00662
0.04	0.9549	0.42	0.5525	0.80	0.2579	1.18	0.09516	1.56	0.02737	1.94	0.00608
0.06	0.9324	0.44	0.5338	0.82	0.2462	1.20	0.08969	1.58	0.02545	1.96	0.00557
0.08	0.9099	0.46	0.5153	0.84	0.2349	1.22	0.08447	1.60	0.02365	1.98	0.00511
0.10	0.8875	0.48	0.4973	0.86	0.2239	1.24	0.07950	1.62	0.02196	2.00	0.00468
0.12	0.8652	0.50	0.4795	0.88	0.2133	1.26	0.07476	1.64	0.02038	2.10	0.00298
0.14	0.8431	0.52	0.4621	0.90	0.2031	1.28	0.07027	1.66	0.01890	2.20	0.00186
0.16	0.8210	0.54	0.4451	0.92	0.1932	1.30	0.06599	1.68	0.01751	2.30	0.00114
0.18	0.7991	0.56	0.4284	0.94	0.1837	1.32	0.06194	1.70	0.01612	2.40	0.00069
0.20	0.7773	0.58	0.4121	0.96	0.1746	1.34	0.05809	1.72	0.01500	2.50	0.00041
0.22	0.7557	0.60	0.3961	0.98	0.1658	1.36	0.05444	1.74	0.01387	2.60	0.00024
0.24	0.7343	0.62	0.3806	1.00	0.1573	1.38	0.05098	1.76	0.01281	2.70	0.00013
0.26	0.7131	0.64	0.3654	1.02	0.1492	1.40	0.04772	1.78	0.01183	2.80	0.00008
0.28	0.6921	0.66	0.3506	1.04	0.1413	1.42	0.04462	1.80	0.01091	2.90	0.00004
0.30	0.6714	0.68	0.3362	1.06	0.1339	1.44	0.04170	1.82	0.01006	3.00	0.00002
0.32	0.6509	0.70	0.3222	1.08	0.1267	1.46	0.03895	1.84	0.00926	3.20	0.00001
0.34	0.6306	0.72	0.3086	1.10	0.1198	1.48	0.03635	1.86	0.00853	3.40	0.00000
0.36	0.6107	0.74	0.2953	1.12	0.1132	1.50	0.03390	1.88	0.00784	3.60	0.00000

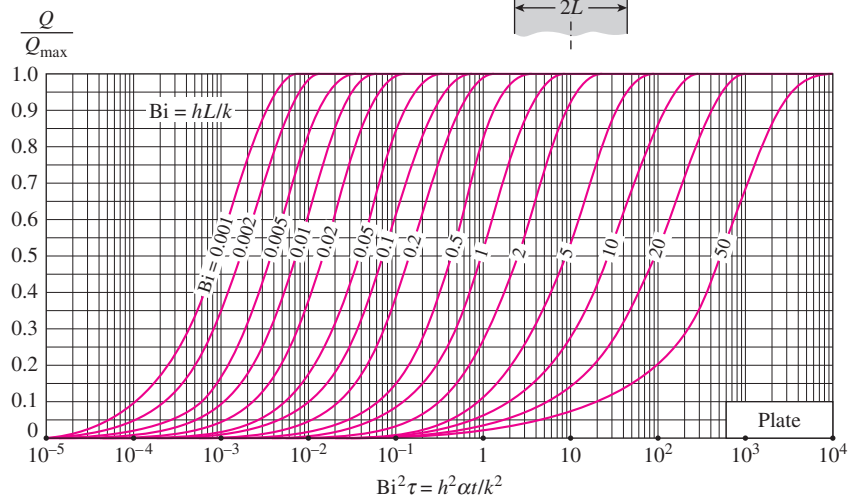
**Páginas seguintes: Gráficos de Heisler para a placa plana, o cilindro e a esfera, e gráfico para o corpo semi-infinito (obtidos de Cengel).**



(a) Midplane temperature (from M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating," *Trans. ASME* 69, 1947, pp. 227–36. Reprinted by permission of ASME International.)



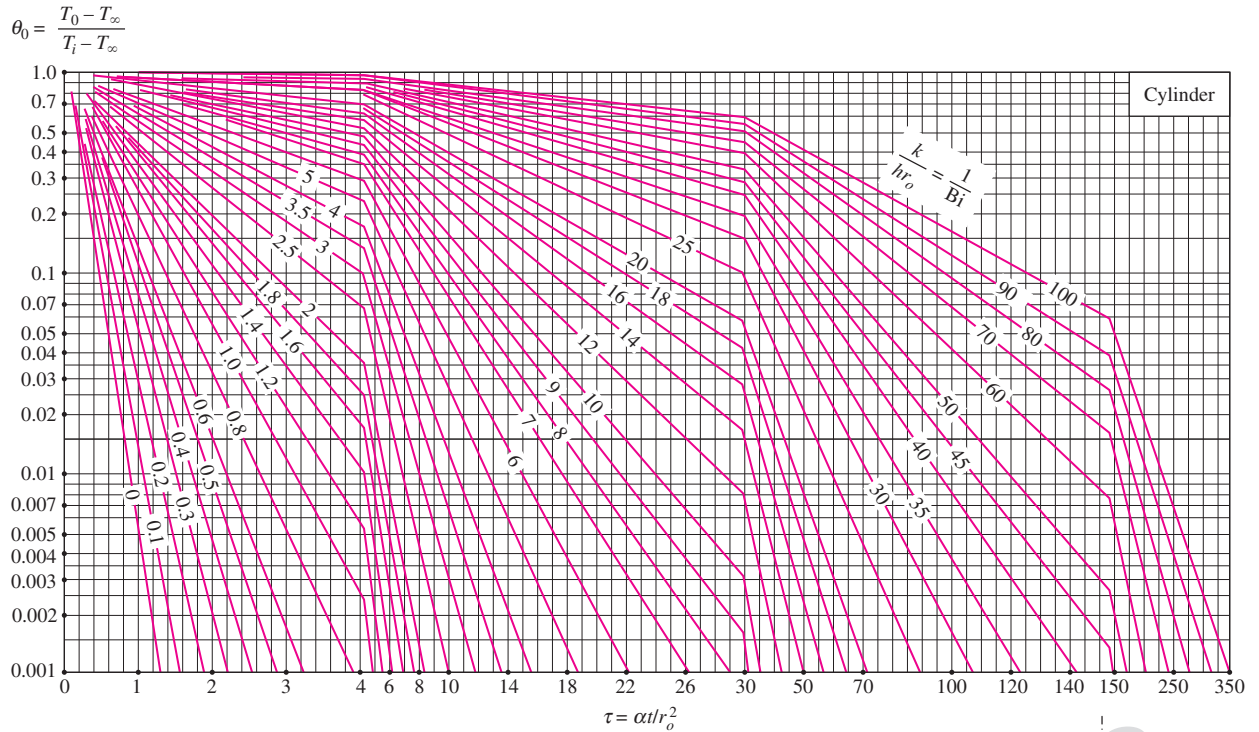
(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating," *Trans. ASME* 69, 1947, pp. 227–36. Reprinted by permission of ASME International.)



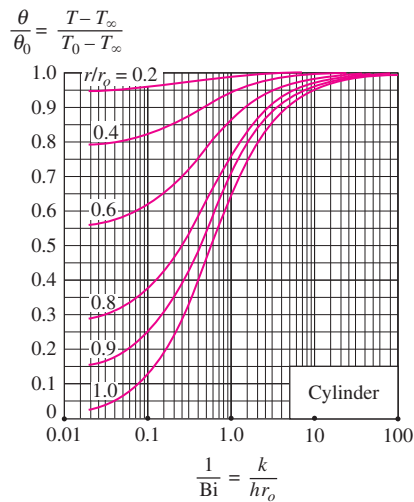
(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

**FIGURE 4-16**

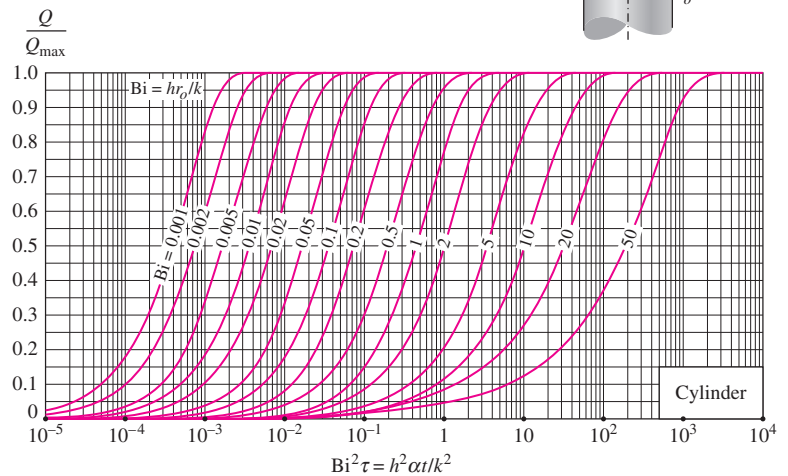
Transient temperature and heat transfer charts for a plane wall of thickness  $2L$  initially at a uniform temperature  $T_i$  subjected to convection from both sides to an environment at temperature  $T_\infty$  with a convection coefficient of  $h$ .



(a) Centerline temperature (from M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating," *Trans. ASME* 69, 1947, pp. 227–36. Reprinted by permission of ASME International.)



(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating," *Trans. ASME* 69, 1947, pp. 227–36. Reprinted by permission of ASME International.)



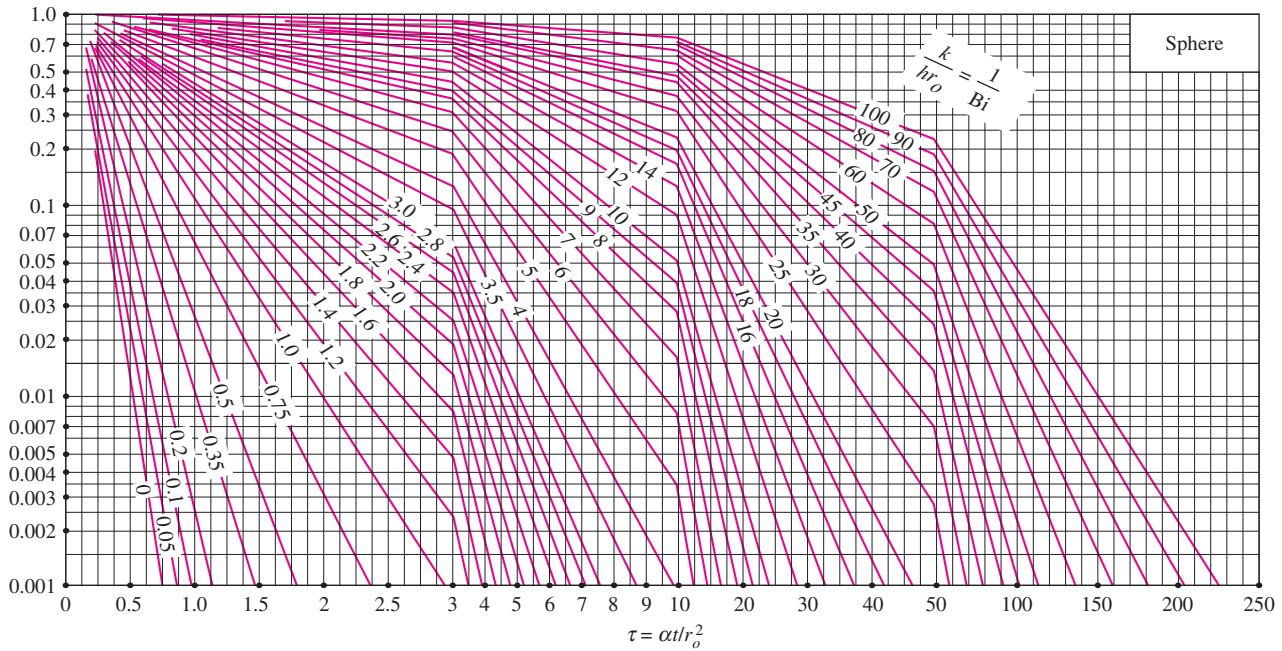
(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

FIGURE 4-17

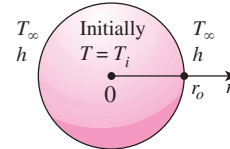
Transient temperature and heat transfer charts for a long cylinder of radius  $r_o$  initially at a uniform temperature  $T_i$  subjected to convection from all sides to an environment at temperature  $T_\infty$  with a convection coefficient of  $h$ .



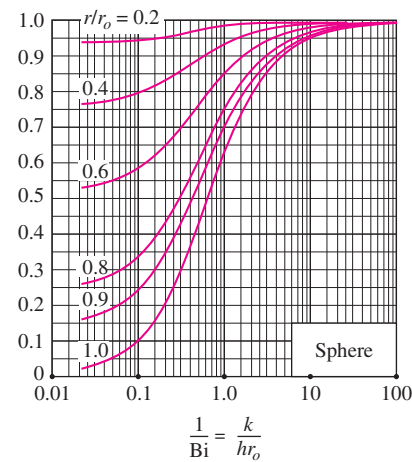
$$\theta_0 = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$



(a) Midpoint temperature (from M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating," *Trans. ASME* 69, 1947, pp. 227–36. Reprinted by permission of ASME International.)

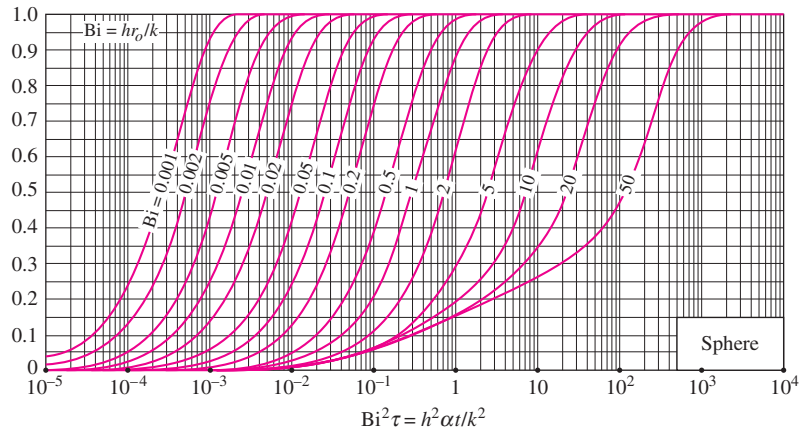


$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$



(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating," *Trans. ASME* 69, 1947, pp. 227–36. Reprinted by permission of ASME International.)

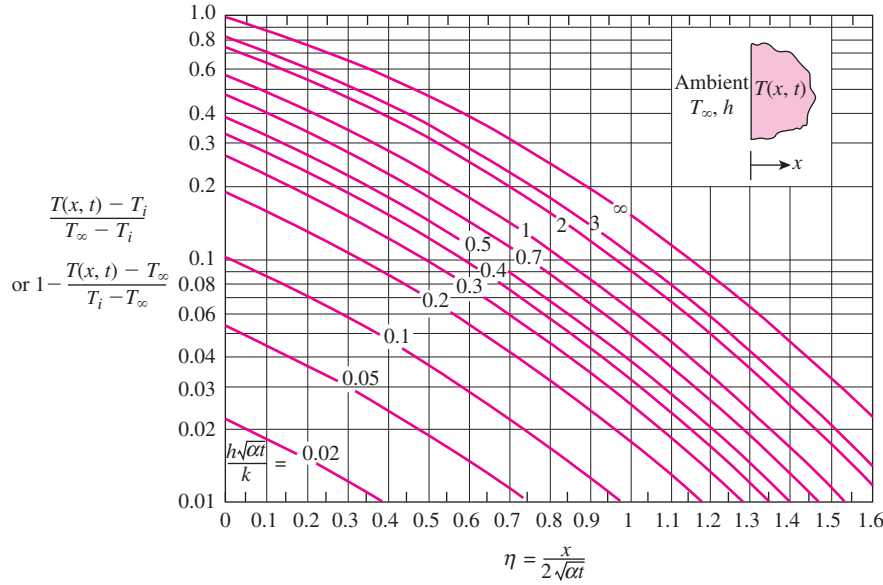
$$\frac{Q}{Q_{\max}}$$



(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

**FIGURE 4-18**

Transient temperature and heat transfer charts for a sphere of radius  $r_o$  initially at a uniform temperature  $T_i$  subjected to convection from all sides to an environment at temperature  $T_\infty$  with a convection coefficient of  $h$ .



**FIGURE 4-30**

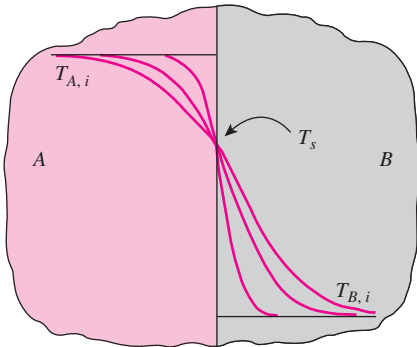
Variation of temperature with position and time in a semi-infinite solid initially at temperature  $T_i$  subjected to convection to an environment at  $T_\infty$  with a convection heat transfer coefficient of  $h$  (plotted using EES).

If the bodies are of different materials, they still achieve a temperature equality, but the surface temperature  $T_s$  in this case will be different than the arithmetic average. Noting that both bodies can be treated as semi-infinite solids with the same specified surface temperature, the energy balance on the contact surface gives, from Eq. 4–45,

$$\dot{q}_{s,A} = \dot{q}_{s,B} \rightarrow -\frac{k_A(T_s - T_{A,i})}{\sqrt{\pi\alpha_A t}} = \frac{k_B(T_s - T_{B,i})}{\sqrt{\pi\alpha_B t}} \rightarrow \frac{T_{A,i} - T_s}{T_s - T_{B,i}} = \sqrt{\frac{(k\rho c_p)_B}{(k\rho c_p)_A}}$$

Then  $T_s$  is determined to be (Fig. 4–31)

$$T_s = \frac{\sqrt{(k\rho c_p)_A} T_{A,i} + \sqrt{(k\rho c_p)_B} T_{B,i}}{\sqrt{(k\rho c_p)_A} + \sqrt{(k\rho c_p)_B}} \quad (4-49)$$



**FIGURE 4-31**

Contact of two semi-infinite solids of different initial temperatures.

Therefore, the interface temperature of two bodies brought into contact is dominated by the body with the larger  $k\rho c_p$ . This also explains why a metal at room temperature feels colder than wood at the same temperature. At room temperature, the  $\sqrt{k\rho c_p}$  value is 24 kJ/m<sup>2</sup>·K for aluminum, 0.38 kJ/m<sup>2</sup>·K for wood, and 1.1 kJ/m<sup>2</sup>·K for the human flesh. Using Eq. 4–49, it can be shown that when a person with a skin temperature of 35°C touches an aluminum block and then a wood block both at 15°C, the contact surface temperature will be 15.9°C in the case of aluminum and 30°C in the case of wood.



## Capítulo 5 – Condução em regime variável

### Exercícios:

- 1) Calcular o tempo de resposta de um termopar (definido como o ponto em que se atinge 99% da variação total de temperatura). O termopar é esférico e é feito dum metal com  $k = 35 \text{ W/(m K)}$ ,  $\rho = 8500 \text{ kg/m}^3$  e  $c_p = 320 \text{ J/(kg K)}$ . O coeficiente de transmissão de calor (convecção mais radiação) é  $h = 65 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ .
- 2) Esferas de 5 cm de diâmetro, feitas de bronze ( $k = 111 \text{ W/(m K)}$ ,  $\rho = 8522 \text{ kg/m}^3$  e  $c_p = 0.385 \text{ kJ/(kg K)}$ ), estão inicialmente a  $120^\circ\text{C}$ , sendo de seguida temperadas em água a  $50^\circ\text{C}$  durante 2 minutos. O coeficiente convectivo é  $h = 240 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ . Para um tratamento de 100 esferas por minuto, calcular: a) A temperatura final das esferas; b) A potência calorífica retirada da água para a manter à temperatura constante de  $50^\circ\text{C}$ .
- 3) Repetir o exercício anterior para esferas de alumínio ( $k = 237 \text{ W/(m K)}$ ,  $\rho = 2702 \text{ kg/m}^3$  e  $c_p = 0.903 \text{ kJ/(kg K)}$ ).
- 4) Estimar o tempo necessário para aquecer leite, de  $3^\circ\text{C}$  até  $38^\circ\text{C}$ . O leite está contido num copo cilíndrico (diâmetro 6 cm; altura 7 cm) de paredes finas, que é mergulhado em água quente a  $60^\circ\text{C}$ . O coeficiente convectivo entre as paredes exteriores do copo e a água quente é  $h = 120 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ . Assume-se para o leite propriedades semelhantes às da água ( $k = 0.613 \text{ W/(m K)}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  e  $c_p = 4.18 \text{ kJ/(kg K)}$ ) e considera-se ainda que o leite está constantemente a ser misturado. Verificar ainda se a análise uniforme é válida.
- 5) Refazer o exercício anterior assumindo agora que a água quente está também a ser agitada de forma a que o coeficiente convectivo passe para o dobro.
- 6) Uma lata de refrigerante (335 ml, altura x diâmetro = 12.5 cm x 6.5 cm; propriedades físicas idênticas às da água) está à temperatura ambiente,  $25^\circ\text{C}$ . Uma pessoa pretende arrefecer o refrigerante agitando continuamente a lata dentro dum recipiente térmico contendo água e gelo (a  $0^\circ\text{C}$ ). Calcular o tempo necessário para que a temperatura da bebida fique a  $8^\circ\text{C}$ . Comentar sobre adequação da análise uniforme.
- 7) Calcular o tempo de aquecimento (de  $22^\circ\text{C}$  até  $140^\circ\text{C}$ ) da placa de um ferro de engomar, quando a temperatura do ar exterior é  $22^\circ\text{C}$  e o coeficiente de transmissão calor  $h = 12 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ . O ferro consome uma potência eléctrica de 1 kW e o rendimento de aquecimento é 85 %. A base é uma placa com área  $0.03 \text{ m}^2$  e espessura 0.5 cm, sendo feita de liga de alumínio ( $\alpha = 7.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\rho = 2770 \text{ kg/m}^3$  e  $c_p = 875 \text{ J/(kg K)}$ ).
- 8) Aquecimento de um ovo considerado como uma esfera de diâmetro 5.5 cm e propriedades idênticas às da água ( $k = 0.6 \text{ W/(m K)}$ ,  $\alpha = 0.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ). O ovo está inicialmente a uma temperatura uniforme de  $8^\circ\text{C}$  e é mergulhado em água a ferver, a  $97^\circ\text{C}$  ( $h = 1400 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ ). Calcular o tempo necessário para que a temperatura no cento do ovo atinja  $70^\circ\text{C}$ .
- 9) Um veio comprido (diâmetro 35 cm) de aço inox ( $k = 14.9 \text{ W/(m K)}$ ,  $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$  e  $c_p = 477 \text{ J/(kg K)}$ ,  $\alpha = 3.95 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) sai do forno a uma temperatura uniforme de  $400^\circ\text{C}$  e é arrefecido suavemente numa câmara a  $150^\circ\text{C}$ , com coeficiente convectivo  $60 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Calcular a temperatura no eixo ao fim de 20 minutos e o calor transferido por metro de comprimento do veio.
- 10) Arrefecimento de costeletas de porco, consideradas como placas com 2 cm de espessura ( $k = 0.45 \text{ W/(m K)}$ ,  $\alpha = 0.91 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ). As costeletas estão de início a  $25^\circ\text{C}$  e são

colocadas numa câmara frigorífica mantida a  $-10^{\circ}\text{C}$ , onde o coeficiente convectivo é  $9 \text{ W/m}^2 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . Estimar o tempo para que as duas superfícies da costeleta fiquem a  $3^{\circ}\text{C}$ .

- 11) Um cilindro de alumínio com 5 cm de diâmetro e 10 cm de altura está inicialmente a  $200^{\circ}\text{C}$  e é arrefecido num meio exterior a  $70^{\circ}\text{C}$  com coeficiente convectivo  $525 \text{ W/m}^2 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . Propriedades do alumínio:  $k = 215 \text{ W/(m K)}$ ,  $\alpha = 8.4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Calcular a temperatura num ponto interior do cilindro, a 1.25 cm do eixo e 6.25 mm duma base, ao fim de 1 minuto.
- 12) Calcular a distância da superfície do solo a que deve ser enterrado um cano de água para evitar congelamento durante 3 meses de inverno, quando a temperatura do solo no início do inverno é  $15^{\circ}\text{C}$  e a temperatura à superfície durante o inverno é  $-10^{\circ}\text{C}$ . Propriedades do solo:  $k = 0.4 \text{ W/(m K)}$ ,  $\alpha = 0.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .