

Transmissão de Calor – Condução Estacionária

P.J. Oliveira

Departamento Engenharia Electromecânica, UBI,
Setembro 2014

Equação geral da condução de calor:

Lei de Fourier (local): $\vec{q} = -k \text{grad} T = -k \nabla T$ [W/m²] e $\dot{Q} = \vec{q} \cdot \vec{A} = \dot{q} A$ [W]

\vec{q} - vector fluxo de calor [W/m²], energia térmica transferida por unidade de área e unidade de tempo, numa determinada direcção;

\dot{q} - magnitude do fluxo de calor [W/m²], $\dot{q} = \|\vec{q}\| = \dot{Q} / A$;

\dot{Q} - taxa de transferência de calor (potência térmica) [W];

k - condutibilidade térmica [W/m K], uma propriedade física do material;

grad ou ∇ - operador gradiente [1/m], é um vector com componentes $(\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$;

T - temperatura [K] (como se trata de diferença de temperaturas, pode vir em °C);

\vec{A} - vector área, com componentes (A_x, A_y, A_z) [m²];

A - área de transferência de calor [m²], normal à direcção do fluxo de calor, $A = \|\vec{A}\|$.

Em geral, o objectivo de um problema de condução de calor será o de determinar a potência térmica transferida através duma geometria especificada (parede plana; invólucro cilíndrico; invólucro esférico, etc.), podendo para isso ser usada uma das seguintes expressões:

a) $\dot{Q} = AU\Delta T$ [W]

em que:

U - coeficiente global de transmissão de calor [W/m² K];

ΔT - diferença de temperaturas global ou equivalente [K];

b) $\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_t}$ [W]

em que:

R_t - resistência térmica global [K/W].

1. Placa plana

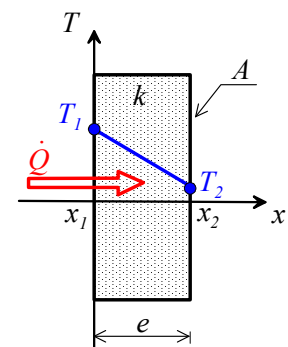
Caso unidimensional (1D, segundo x):

$$\dot{Q} = -kA \frac{dT}{dx} \quad [\text{W}]$$

e integrando, com \dot{Q} , k e A constantes,

$$\int_1^2 \dot{Q} dx = - \int_1^2 kA dT \Rightarrow \dot{Q} = -kA \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = kA \frac{(T_1 - T_2)}{\Delta x} \Rightarrow \dot{Q} = kA \frac{\Delta T}{e} \quad [\text{W}]$$

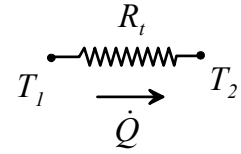
em que a espessura da placa é $e = \Delta x = x_2 - x_1$ e a diferença de temperaturas $\Delta T = T_1 - T_2$. Note-se que o fluxo de calor se faz da maior temperatura T_1 (face quente



da placa, em $x = x_1$) para a menor T_2 (face fria da placa, em $x = x_2$), como estipulado pela 2ª Lei da Termodinâmica.

A resistência térmica condutiva (R_t), por analogia com a fórmula da electricidade $V = RI$ (diferença de potencial igual à resistência eléctrica multiplicada pela intensidade da corrente), em que se fazem as equivalências: potencial $V \equiv \Delta T$ e corrente $I \equiv \dot{Q}$, vem:

$$\Delta T = \frac{e}{kA} \dot{Q} = R_t \dot{Q} \quad \text{com} \quad \boxed{R_t = \frac{e}{kA}} \quad [\text{K/W}]$$



Como no caso das resistências eléctricas, as resistências térmicas em série somam-se e, para as resistências em paralelo, somam-se os inversos:

$$R_{t, \text{serie}} = \sum_j R_{t,j} \quad \text{e} \quad 1/R_{t, \text{paral.}} = \sum_j (1/R_{t,j}).$$

2. Várias placas planas

Quantidade de calor através de cada placa, por unidade de tempo:

$$\dot{Q} = -kA \frac{dT}{dx} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = k_1 A \frac{T_1 - T_2}{e_1} = k_2 A \frac{T_2 - T_3}{e_2} = k_3 A \frac{T_3 - T_4}{e_3}$$

ou, somando sobre todas as placas

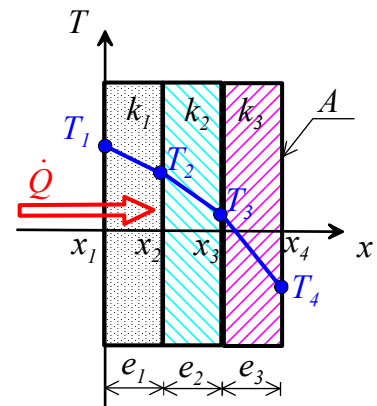
$$\dot{Q} \left(\frac{e_1}{k_1 A} + \frac{e_2}{k_2 A} + \frac{e_3}{k_3 A} \right) = (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) + (T_3 - T_4) = (T_1 - T_4) = \Delta T_{\text{tot}}$$

por fim

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T_{\text{tot}}}{\left(\frac{e_1}{k_1 A} + \frac{e_2}{k_2 A} + \frac{e_3}{k_3 A} \right)} = AU \Delta T_{\text{tot}} \quad [\text{W}]$$

com coeficiente global de transmissão por condução

$$\boxed{U = \frac{1}{\left[\frac{e_1}{k_1} + \frac{e_2}{k_2} + \frac{e_3}{k_3} \right]}} \quad \text{ou} \quad \boxed{U = \frac{1}{\sum_j \left[\frac{e_j}{k_j} \right]}} \quad [\text{W/m}^2 \text{ K}].$$



Nestas relações, e_j é a espessura da placa j e k_j a sua condutibilidade térmica.

Usando a noção de resistência térmica, com adição de resistências em série:

$$\boxed{R_{t, \text{tot}} = \sum_i \left(\frac{e_i}{k_i A} \right) = \frac{e_1}{k_1 A} + \frac{e_2}{k_2 A} + \frac{e_3}{k_3 A}} \quad [\text{K/W}]$$

e, de $V = RI$, vem

$$V = \left(\sum_j R_j \right) I \quad \Rightarrow \quad \Delta T_{\text{tot}} = \left(\sum_j R_{t,j} \right) \dot{Q} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = \frac{\Delta T_{\text{tot}}}{\sum_j R_{t,j}}$$

ou

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T_{tot}}{\sum_j \left(\frac{e_j}{Ak_j} \right)} \quad [\text{W}] \quad \text{com } \Delta T_{tot} \equiv (T_{int} - T_{ext}) = (T_1 - T_4) \quad [\text{K}]$$

pelo que o resultado final é o mesmo, mas sendo obtido de forma mais expedita.

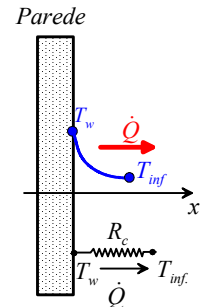
3. Placa plana com convecção

A equação de Newton para a taxa de calor por convecção, entre a superfície duma parede à temperatura T_w e um fluido com temperatura T_∞ (a infinito, longe da parede), é:

$$\dot{Q} = Ah(T_w - T_\infty) \quad [\text{W}]$$

em que h é o coeficiente convectivo. Desta forma, a resistência térmica convectiva (R_c) fica definida como:

$$\Delta T \equiv (T_w - T_\infty) = R_c \dot{Q} = \frac{1}{Ah} \dot{Q} \quad \Rightarrow \quad R_c = \frac{1}{Ah} \quad [\text{K/W}]$$

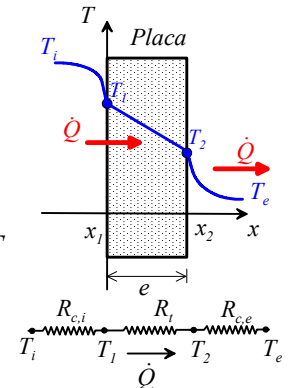


Considerando agora a placa plana na sua globalidade, a transferência de calor faz-se por convecção nas faces interior (índice i) e exterior (índice e) da placa, e por condução no seu interior. Somando essas duas resistências convectivas com a resistência condutiva através da placa, fica:

$$\Delta T_{tot} = T_i - T_e = \left(\sum_j R_{t,j} \right) \dot{Q} = (R_{c,i} + R_t + R_{c,e}) \dot{Q}$$

ou

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_e}{R_{c,i} + R_t + R_{c,e}} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{Ah_i} + \frac{e}{Ak} + \frac{1}{Ah_e}} = A \underbrace{\left(\frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_e}} \right)}_{=U} (T_i - T_e) = AU \Delta T$$



Portanto, a taxa de transferência de calor vem,

$$\dot{Q} = AU \Delta T \quad [\text{W}] \quad \text{com } \Delta T \equiv \Delta T_{tot} = T_i - T_e$$

e o coeficiente global de transferência de calor:

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_e}} \quad [\text{W/m}^2 \text{ K}]$$

4. Casca cilíndrica

O fluxo de calor (taxa de transferência de calor por unidade de área) segue a mesma fórmula da placa plana, dada acima, como estabelecido pela lei de Fourier para a condução de calor:

$$\dot{q} = -k \frac{dT}{dr}$$

em que r é a distância radial. Multiplicando pela área transversal cilíndrica de transferência de calor, obtém-se a quantidade total de calor transferido por unidade de tempo, a grandeza que se conserva:

$$\dot{Q} = A\dot{q} = 2\pi rL\dot{q} = -2\pi rLk \frac{dT}{dr}$$

Integrando entre a superfície interior e a superfície exterior da casca cilíndrica, pontos 1 e 2, com \dot{Q} e k constantes, vem:

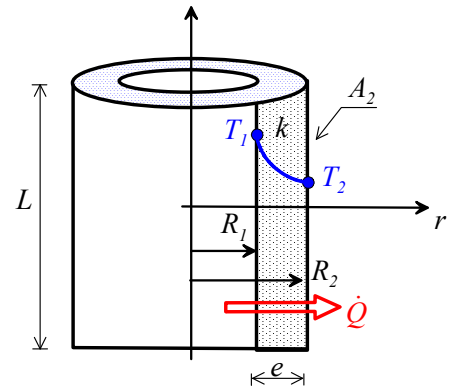
$$\int_1^2 \dot{Q} \frac{dr}{r} = - \int_1^2 2\pi Lk dT \Rightarrow \dot{Q} \int_1^2 \frac{dr}{r} = -2\pi Lk \int_1^2 dT$$

$$\Rightarrow \dot{Q} [\ln r]_1^2 = -2\pi Lk (T_2 - T_1)$$

$$\dot{Q} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) = 2\pi Lk (T_1 - T_2) \Rightarrow \dot{Q} = 2\pi Lk \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(R_2 / R_1)}$$

A resistência térmica fica assim definida como ($\Delta T = T_1 - T_2$):

$$\Delta T = R_{t,cil} \dot{Q} \quad \text{com} \quad R_{t,cil} = \frac{\ln(R_2 / R_1)}{2\pi Lk}$$



Nota: quando a espessura entre cascas, $e = R_2 - R_1$, é pequena ($e / R_1 \equiv \varepsilon \ll 1$), tem-se $R_2 / R_1 = 1 + e / R_1 = 1 + \varepsilon$ e como $\ln(1 + \varepsilon) \sim \varepsilon = e / R$, a resistência térmica para **cilindros com pequena curvatura** fica:

$$R_{t,cil} = \frac{\ln(R_2 / R_1)}{2\pi Lk} \cong \frac{e / R}{2\pi Lk} = \frac{e}{2\pi RLk} = \frac{e}{Ak}$$

idêntica à fórmula para placas planas, com área da superfície de transferência igual a $A = 2\pi RL$ (área de casca cilíndrica fina, $R = R_1 \cong R_2$).

5. Várias cascas cilíndricas com convecção

Procede-se por analogia com o caso semelhante da placa plana ou, de forma mais fácil, faz-se a soma das várias resistências térmicas em série. Considerando, para simplificar, duas cascas cilíndricas de material sólido:

$$\Delta T_{tot} = T_i - T_e = \left(\sum_j R_{t,j} \right) \dot{Q} = (R_{c,i} + R_{t,1} + R_{t,2} + R_{c,e}) \dot{Q}$$

ou

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_e}{R_{c,i} + R_{t,1} + R_{t,2} + R_{c,e}} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{A_i h_i} + \frac{\ln(R_2 / R_1)}{2\pi Lk_1} + \frac{\ln(R_3 / R_2)}{2\pi Lk_2} + \frac{1}{A_e h_e}}$$

com $A_i = 2\pi R_1 L$ e $A_e = 2\pi R_3 L$.

Nota: a casca 1 está entre os raios R_1 e R_2 e tem condutibilidade térmica k_1 ; a casca 2 está entre os raios R_2 e R_3 e tem condutibilidade k_2 ; os raios interior e exterior são $R_i = R_1$ e $R_e = R_3$.

A expressão anterior pode escrever-se como ($\Delta T \equiv \Delta T_{tot} = T_i - T_e$):

$$\dot{Q} = A_i U_i \Delta T = A_e U_e \Delta T = AU \Delta T$$

com

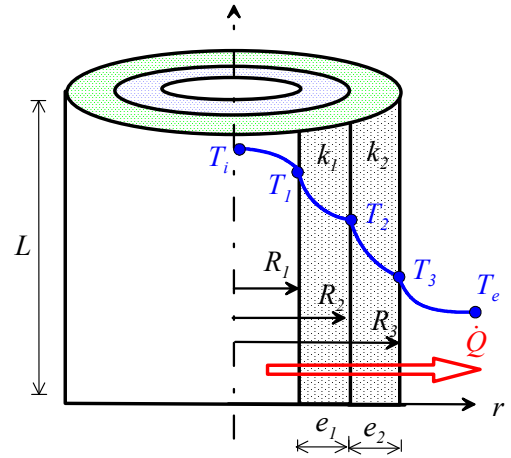
$$AU = \frac{1}{\left[\frac{1}{A_i h_i} + \frac{\ln(R_2 / R_1)}{2\pi L k_1} + \frac{\ln(R_3 / R_2)}{2\pi L k_2} + \frac{1}{A_e h_e} \right]}$$

e

$$U_i = \frac{1}{\left[\frac{1}{h_i} + \frac{R_1 \ln(R_2 / R_1)}{k_1} + \frac{R_1 \ln(R_3 / R_2)}{k_2} + \frac{R_1}{R_3 h_e} \right]}$$

ou

$$U_e = \frac{1}{\left[\frac{R_3}{R_1 h_i} + \frac{R_3 \ln(R_2 / R_1)}{k_1} + \frac{R_3 \ln(R_3 / R_2)}{k_2} + \frac{1}{h_e} \right]}$$



6. Casca esférica

O fluxo de calor segue a lei de Fourier:

$$\dot{q} = -k \frac{dT}{dr}$$

em que r é a distância radial das coordenadas esféricas. Multiplicando pela área da secção esférica de transferência de calor, obtém-se a taxa de transferência de calor (grandeza conservada):

$$\dot{Q} = A\dot{q} = 4\pi r^2 \dot{q} = -4\pi r^2 k \frac{dT}{dr}$$

Integrando entre 1 e 2, com \dot{Q} e k constantes

$$\int_1^2 \dot{Q} \frac{dr}{r^2} = -\int_1^2 4\pi k dT \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = -4\pi k \int_1^2 dT$$

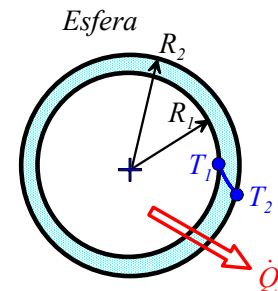
$$\Rightarrow \dot{Q} \left[-\frac{1}{r} \right]_1^2 = -4\pi k (T_2 - T_1)$$

ou

$$\dot{Q} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 4\pi k (T_1 - T_2) \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = 4\pi R_1 R_2 k \frac{(T_1 - T_2)}{(R_2 - R_1)}$$

A resistência térmica da esfera fica assim definida como ($\Delta T = T_1 - T_2$):

$$\Delta T = R_{t,esf} \dot{Q} \quad \text{com} \quad R_{t,esf} = \frac{(R_2 - R_1)}{4\pi R_1 R_2 k}$$



Nota: quando a espessura entre cascas, $e = R_2 - R_1$, é pequena, tem-se $e/R \ll 1$ com $R \approx R_1 \approx R_2$, ficando:

$$R_{t,esf} \cong \frac{e}{4\pi R^2 k} = \frac{e}{Ak}$$

expressão idêntica aquela para placas planas, em que a área da superfície esférica de transferência é $A = 4\pi R^2$ (área de casca esférica fina).

7. Várias cascas esféricas com convecção

Por analogia com o caso cilíndrico, tem-se:

$$\Delta T_{tot} = T_i - T_e = \left(\sum_j R_{t,j} \right) \dot{Q} = (R_{c,i} + R_{t,1} + R_{t,2} + R_{c,e}) \dot{Q}$$

ou

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_e}{R_{c,i} + R_{t,1} + R_{t,2} + R_{c,e}} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{A_i h_i} + \frac{(R_2 - R_1)}{4\pi R_1 R_2 k_1} + \frac{(R_3 - R_2)}{4\pi R_2 R_3 k_2} + \frac{1}{A_e h_e}}$$

com $A_i = 4\pi R_1^2$ e $A_e = 4\pi R_3^2$.

Nota: a casca 1 está entre os raios R_1 e R_2 e tem condutibilidade térmica k_1 ; a casca 2 está entre os raios R_2 e R_3 e tem condutibilidade k_2 ; os raios interior e exterior são $R_i = R_1$ e $R_e = R_3$.

A expressão anterior pode escrever-se como ($\Delta T_{tot} \equiv \Delta T = T_i - T_e$):

$$\dot{Q} = A_i U_i \Delta T = A_e U_e \Delta T = AU \Delta T$$

com

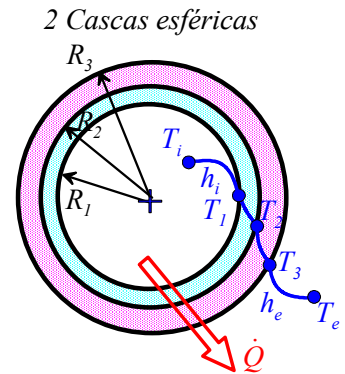
$$AU = \frac{1}{\left[\frac{1}{A_i h_i} + \frac{(R_2 - R_1)}{4\pi R_1 R_2 k_1} + \frac{(R_3 - R_2)}{4\pi R_2 R_3 k_2} + \frac{1}{A_e h_e} \right]}$$

e

$$U_i = \frac{1}{\left[\frac{1}{h_i} + \frac{R_1}{R_2} \frac{(R_2 - R_1)}{k_1} + \frac{R_1^2}{R_2 R_3} \frac{(R_3 - R_2)}{k_2} + \frac{R_1^2}{R_3^2} \frac{1}{h_e} \right]}$$

ou

$$U_e = \frac{1}{\left[\frac{R_3^2}{R_1^2} \frac{1}{h_i} + \frac{R_3}{R_1 R_2} \frac{(R_2 - R_1)}{k_1} + \frac{R_3}{R_2} \frac{(R_3 - R_2)}{k_2} + \frac{1}{h_e} \right]}$$



8. Geração interna de calor

Inúmeras situações de transmissão de calor apresentam fontes internas de energia (eléctrica, nuclear, química), a qual se converte localmente em calor pelo habitual mecanismo da agitação molecular aleatória. A taxa de geração por unidade de volume é aqui designada \dot{q}_v [W/m³]. Como exemplo, a potência desenvolvida por uma corrente eléctrica de intensidade I a fluir através de um cabo cilíndrico com resistência eléctrica R_e é $\dot{W}_e = R_e I^2$; por consequência, o valor da taxa de calor desenvolvido por efeito de Joule, por unidade de volume, vem $\dot{q}_v = R_e I^2 / \pi R^2 L$. Em problemas com geração interna de calor, a noção de resistência térmica das secções anteriores não se pode aplicar. Considerando que terá de haver conservação de energia, a energia gerada

internamente no volume V deve ser igual ao calor convectado através da superfície de área A . Em geral tem-se:

$$\dot{q}_v V = Ah(T_s - T_\infty) \Rightarrow T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}_v V}{Ah}$$

o que dá para a temperatura superficial de:

- Placa plana com espessura $2L$ -

$$(A = 2A', V = A' \times 2L)$$

- cilindro infinito, de raio R -

$$(A = 2\pi RL, V = \pi R^2 L)$$

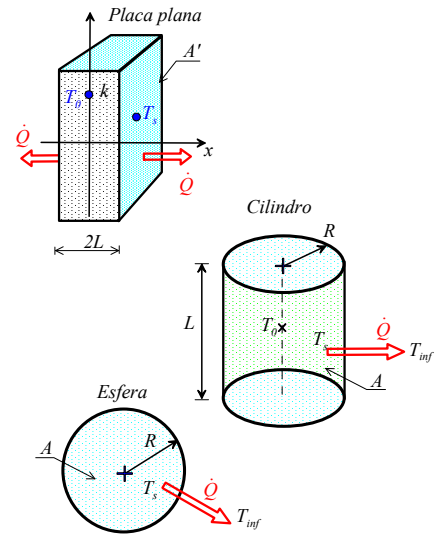
- esfera, de raio R -

$$(A = 4\pi R^2, V = \frac{4}{3}\pi R^3)$$

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}_v L}{h}$$

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}_v R}{2h}$$

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}_v R}{3h}$$



Devido a simetria, a temperatura máxima nestes casos ocorre no plano central, eixo, ou centro destas geometrias, e obtém-se através de um balanço de energia sobre um volume limitado pela coordenada genérica x (pode ser a distância radial, para cilindro e esfera),

$$-kA(x) \frac{dT}{dx} = \dot{q}_v V(x) \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}_v V(x)}{k A(x)}$$

Para cada caso, de geometria plana, cilíndrica ou esférica, integrando entre o ponto central (0) e a superfície (s), com a diferença interna de temperaturas definida como $\Delta T_{int} = T_0 - T_s$, obtém-se:

$$\text{- Placa plana, } \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}_v}{k} \frac{Ax}{A}$$

$$\Rightarrow \int_0^s dT = -\frac{\dot{q}_v}{k} \int_0^s x dx \Rightarrow \Delta T_{int} = \frac{\dot{q}_v L^2}{2k}$$

$$\text{- Cilindro, } \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_v}{k} \frac{\pi r^2 L}{2\pi r L}$$

$$\Rightarrow \int_0^s dT = -\frac{\dot{q}_v}{2k} \int_0^s r dr \Rightarrow \Delta T_{int} = \frac{\dot{q}_v R^2}{4k}$$

$$\text{- Esfera, } \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_v}{k} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^s dT = -\frac{\dot{q}_v}{3k} \int_0^s r dr \Rightarrow \Delta T_{int} = \frac{\dot{q}_v R^2}{6k}$$

Estes dois conjuntos de equações permitem obter a temperatura máxima para cada caso: o 1º grupo dá a temperatura à superfície T_s , e o 2º grupo dá a temperatura no “centro” $T_0 = T_s + \Delta T_{int}$.

Resumo:

Resistência térmica, $\Delta T = R_t \dot{Q}$

| Geometria | R_t [m²/W] | Notação |
|-----------|----------------------------------|---------------|
| Placa | $e / (kA)$ ($e = x_2 - x_1$) | $R_{t,placa}$ |
| Cilindro | $\log(R_2 / R_1) / (2\pi Lk)$ | $R_{t,cil}$ |
| Esfera | $(R_2 - R_1) / (4\pi R_1 R_2 k)$ | $R_{t,esf}$ |
| Convecção | $1 / (hA)$ | R_c |

Exemplo 1 - Condução em geometria plana. Transmissão de calor em janela com vidro simples ou duplo. Calcular a taxa de transferência de calor através de uma janela de vidro ($k = 0.78 \text{ W/(m K)}$), no inverno, quando o interior está a 20°C e o exterior a -10°C . A janela tem área $80 \times 150 \text{ cm}$ e os coeficientes de convecção no interior e no exterior são 10 e $40 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$, respectivamente. O vidro simples tem espessura 8 mm , enquanto no caso do vidro duplo cada lâmina de vidro tem 4 mm de espessura, com um espaço de ar de 10 mm (sem ventilação, $k_{ar} = 0.026 \text{ W/(m K)}$). Obter ainda a temperatura interior do vidro. (do Cengel)

Usando a noção de resistências térmica em série, a taxa de transferência de calor do interior para o exterior (perda de calor através do vidro) é dada por $\dot{Q} = \Delta T / R_{t,tot}$, com $\Delta T = T_i - T_e = 20 - (-10) = 30^\circ\text{C}$, e resistência térmica total

$$R_{t,tot} = R_{c,i} + R_{t,vidro} + R_{c,e} = \frac{1}{Ah_i} + \frac{e_{vidro}}{Ak_{vidro}} + \frac{1}{Ah_e} = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{10} + \frac{0.008}{0.78} + \frac{1}{40} \right),$$

ou seja, a resistência da área unitária é

$$AR_{t,tot} = 0.10 + 0.0102 + 0.025 = 0.1352 \text{ K m}^2/\text{W}$$

no caso do vidro simples. Repare-se que a principal resistência (a que controla a transferência de calor) é a convectiva interior, com a convectiva exterior 4 vezes menor e a do próprio vidro cerca de 10 vezes inferior. Como a área da janela é $A = 0.80 \times 1.50 = 1.20 \text{ m}^2$, a taxa de calor transferido pela janela de vidro simples é:

$$\dot{Q} = A \frac{\Delta T}{AR_{t,tot}} = 1.20 \times 30 / 0.1352 = 266.2 \text{ W}.$$

Um cálculo semelhante para a janela de vidro duplo, considerando que no espaço de ar o calor é transferido unicamente por condução (isto é, assume-se não existir convecção natural na camada de 10 mm de ar estagnado entre os vidros), fornece as seguintes resistências unitárias:

$$AR_{t,tot} = \frac{1}{h_i} + 2 \frac{e_{vidro}}{k_{vidro}} + \frac{e_{ar}}{k_{ar}} + \frac{1}{h_e} = \left(\frac{1}{10} + 2 \times \frac{0.004}{0.78} + \frac{0.010}{0.026} + \frac{1}{40} \right) = 0.10 + 0.01025 + 0.3846 + 0.025 = 0.5199 \text{ K m}^2/\text{W}$$

e o calor transferido vem

$$\dot{Q} = A \frac{\Delta T}{AR_{t,tot}} = 1.20 \times 30 / 0.5199 = 69.2 \text{ W}.$$

Repare-se que, neste caso, a maior resistência térmica é a do espaço de ar entre vidros, a qual permite uma redução da perda de calor de 74%. Os coeficientes globais de transmissão de calor são iguais ao inverso das resistências térmicas unitárias, ou seja $U = 1.92 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ para o vidro duplo e $U = 7.40 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ para o vidro simples.

Se sala fosse aquecida por radiadores eléctricos, com custo unitário da electricidade de $Y_E = 0.22 \text{ Euros/kWh}$, o que se pouparia em dinheiro com a mudança do vidro simples para o vidro duplo, assumindo que o aquecedor funciona durante 10 h por dia em 4 meses de inverno, seria:

$$L = (\dot{Q}_{simples} - \dot{Q}_{duplo}) Y_E T_h = (266.2 - 69.2) 10^{-3} \times 1.20 \times 0.22 \times 10 \times 30 \times 4 = 52.0 \text{ Euros}.$$

Designa-se por L o lucro monetário e por T_h o tempo de funcionamento total em horas.

A temperatura da face interior vidro é um parâmetro com interesse para o conforto térmico, pois se for muito baixa irá provocar condensação local do vapor de água existente no ar interior. Pode ser obtida a partir das taxas de transferência de calor já calculadas, usando a resistência convectiva da camada interior de ar:

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_{wi}}{R_{c,i}} = \frac{T_i - T_{wi}}{1 / Ah_i} \Rightarrow T_{wi} = T_i - \dot{Q} / Ah_i$$

Para o vidro simples:

$$T_{wi} = 20 - 266.2 / (1.20 \times 10) = -2.2 \text{ °C (muito baixa)}$$

e para o duplo

$$T_{wi} = 20 - 69.2 / (1.20 \times 10) = 14.2 \text{ °C}$$

Verifica-se que o vidro duplo apresenta uma temperatura na face interior bastante superior àquela do vidro simples, e que, muito provavelmente, estará acima da temperatura do ponto de orvalho no interior, evitando assim a condensação do vapor de água.

Exemplo 2 – Condução em geometria cilíndrica. Um tubo de aço ($k_{aço} = 45.2 \text{ W/(m K)}$) com diâmetro nominal de 2" ($D_i = 2.067"$; $e = 0.154"$; nota: 1" = 25.4 mm) transporta vapor de água a 121°C. O tubo é isolado com uma camada de 2" de revestimento de magnésio ($k_{mag.} = 0.069 \text{ W/(m K)}$) e uma outra camada exterior de 2" de cortiça ($k_{cortiça} = 0.052 \text{ W/(m K)}$). Calcular a perda de calor para o exterior quando a temperatura da parede externa é 32°C?

Da Secção 5 a fórmula para a taxa de transferência de calor através de 3 cascas cilíndrica, quando as temperaturas das paredes interior e exterior são especificadas, é:

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_{we}}{R_{t,tot}} = \frac{T_{wi} - T_{we}}{R_{t,aço} + R_{t,mag.} + R_{t,cortiça}} = \frac{2\pi L(T_{wi} - T_{we})}{\frac{\ln(R_2 / R_1)}{k_{aço}} + \frac{\ln(R_3 / R_2)}{k_{mag.}} + \frac{\ln(R_4 / R_3)}{k_{cortiça}}}$$

Assume-se que o coeficiente convectivo interior, na superfície de contacto entre o tubo de aço e o vapor, é elevado, de forma que a temperatura da parede interior do tubo fica igual à temperatura do vapor ($T_{wi} = T_i$). Os raios das várias cascas cilíndricas consecutivas são:

$$R_1 = 2" \times 25.4 / 2 = 26.25 \text{ mm}$$

$$R_2 = R_1 + e_{aço} = 26.25 + 0.154 \times 25.4 = 26.25 + 3.91 = 30.16 \text{ mm}$$

$$R_3 = R_2 + e_{mag.} = 30.16 + 2 \times 25.4 = 80.96 \text{ mm}$$

$$R_4 = R_3 + e_{cortiça} = 80.96 + 50.8 = 131.76 \text{ mm.}$$

As resistências térmicas no denominador da equação anterior (resistências multiplicadas por 2π para um metro de tubo) são:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(R_2 / R_1)}{k_{aço}} + \frac{\ln(R_3 / R_2)}{k_{mag.}} + \frac{\ln(R_4 / R_3)}{k_{cortiça}} &= \\ &= \frac{1}{45.2} \ln\left(\frac{30.16}{26.25}\right) + \frac{1}{0.069} \ln\left(\frac{80.96}{30.16}\right) + \frac{1}{0.052} \ln\left(\frac{131.76}{80.96}\right) = \\ &= 0.00307 + 14.31 + 9.37 = 23.68 \text{ K m/W} \end{aligned}$$

Confirma-se que a resistência da parede de aço do tubo é desprezável face às resistências das duas camadas de isolamento. A taxa de transferência de calor para o exterior, por metro de tubo ($L = 1$ m), é:

$$\dot{Q} = \frac{(T_{wi} - T_{we})}{R_{t,tot}} = \frac{2\pi L (T_{wi} - T_{we})}{2\pi L R_{t,tot}} = \frac{2\pi (121 - 32)}{23.68} = 23.6 \text{ W/m}$$

Exemplo 3 – Geração interna de calor. Uma resistência eléctrica de 2 kW é usada para ferver água a uma temperatura de 105 °C. A resistência é cilíndrica, com diâmetro 4 mm e comprimento 50 cm, sendo feita de metal com condutibilidade térmica 15 W/(m K). Calcular a temperatura no centro da resistência. (Cengel)

Assume-se que toda a potência eléctrica da resistência ($\dot{W} = 2$ kW) é dissipada internamente, de forma uniforme, por efeito de Ohm. Assim, a taxa de geração de calor por unidade de volume é:

$$\dot{q}_v = \frac{\dot{W}}{V} = \frac{\dot{W}}{(\pi D^2 / 4) L} = \frac{2000}{(\pi 0.004^2 / 4) \times 0.5} = 3.183 \times 10^8 \text{ W/m}^3$$

Assume-se ainda que o coeficiente convectivo entre a superfície da resistência eléctrica e a água a ferver é muito elevado, o que implica que a temperatura da superfície é aproximadamente igual à da água $T_s = T_\infty = 105^\circ\text{C}$.

A fórmula deduzida na Secção 8, que dá a variação interna de temperatura num cilindro submetido a geração de calor,

$$\Delta T_{int} = \frac{\dot{q}_v R^2}{4k}$$

permite calcular imediatamente a temperatura central (máxima) da resistência:

$$T_0 = T_s + \frac{\dot{q}_v R^2}{4k} = 105 + \frac{3.183 \times 10^8 \times 0.002^2}{4 \times 15} = 126.2^\circ\text{C}.$$

Não se tratando de um valor muito elevado, considera-se que o metal poderá operar sem problemas de fusão, ou deterioração devido a temperaturas extremas, ou outras causas desse tipo.

Exemplo 4 – Condução em geometria esférica. Um depósito para armazenar gelo é constituído por uma esfera metálica (aço inox, $k = 15$ W/(m K)), com 3 m de diâmetro e 2 cm de espessura. A temperatura do gelo é 0 °C e a temperatura do ar exterior é 22 °C. Os coeficientes de transmissão de calor são $h_i = 80$ W/(m² K), no interior, e $h_e = 15.3$ W/(m² K) no exterior, englobando efeitos de radiação e convecção, respectivamente 5.3 e 10 W/(m² K). O calor latente de fusão do gelo é $h_{sf} = 333.7$ kJ/kg (poderia ser obtido numa tabela de propriedades da água). Calcular a taxa de transferência de calor através da parede do depósito e a massa de gelo que funde diariamente.

A fórmula para a taxa de transferência de calor em coordenadas esféricas (Secção 6 e 7) é:

$$\dot{Q} = \frac{T_e - T_i}{R_{c,i} + R_{t,esf} + R_{c,e}} = \frac{T_e - T_i}{\frac{1}{A_i h_i} + \frac{(R_2 - R_1)}{4\pi R_1 R_2 k} + \frac{1}{A_e h_e}}$$

com $R_1 = 3 / 2 = 1.5$ m e $R_2 = R_1 + e = 1.5 + 0.02 = 1.52$ m. As resistências térmicas são (espessura $e = R_2 - R_1$)

$$R_{t,tot} = R_{c,i} + R_{t,esf} + R_{c,e} = \frac{1}{4\pi R_1^2 h_i} + \frac{e}{4\pi R_1 R_2 k} + \frac{1}{4\pi R_2^2 h_e} \quad \text{K/W}$$

ou, de forma mais simples, fazendo aparecer resistências unitárias,

$$A_i R_{t,tot} = \frac{1}{h_i} + \frac{e}{(R_2 / R_1) k} + \frac{1}{(R_2 / R_1)^2 h_e} = \frac{1}{80} + \frac{0.02}{(1.52 / 1.5) \times 15} + \frac{1}{(1.52 / 1.5)^2 \times 15.3} \\ = 0.0125 + 0.001316 + 0.06365 = 0.07747 \quad \text{K m}^2/\text{W}.$$

A maior resistência é aquela devida à convecção e radiação exteriores, e a resistência da parede metálica é tão pequena que poderia ter sido desprezada. A potência transferida é obtida multiplicando a razão entre diferença de temperaturas e resistência total unitária pela área interior ($A_i = 4\pi R_1^2 = 28.274 \text{ m}^2$):

$$\dot{Q} = A_i \frac{T_e - T_i}{A_i R_{t,tot}} = 4\pi R_1^2 \frac{22 - 0}{0.07747} = 8030 \text{ W}$$

Note-se ainda que, neste caso, como a espessura da parede esférica é pequena comparada com o raio da esfera (2 cm e 150 cm), o cálculo poderia ser feito como se de uma parede plana de área A_i se tratasse, o que daria:

$$A_i R_{t,tot} = \frac{1}{h_i} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_e} = \frac{1}{80} + \frac{0.02}{15} + \frac{1}{15.3} = 0.07919 \quad \text{K m}^2/\text{W}$$

e

$$\dot{Q} = A_i \frac{T_e - T_i}{A_i R_{t,tot}} = 28.274 \times \frac{22 - 0}{0.07919} = 7855 \text{ W}$$

um erro de 2%.

O cálculo da massa de gelo derretido faz-se igualando a quantidade de calor necessária para derreter uma massa m (o calor latente de mudança de fase vezes essa massa), à taxa de calor transferido pela parede do reservatório \dot{Q} vezes o intervalo de tempo decorrido, Δt (neste caso, 1 dia):

$$Q = m h_{sf} = \dot{Q} \Delta t \quad \Rightarrow m = \frac{\dot{Q} \Delta t}{h_{sf}} = \frac{8030 \times (24 \times 60 \times 60)}{333.7 \times 10^3} = 2079 \text{ kg}.$$

Portanto, no decorrer de um dia derretem cerca de 2 toneladas de gelo. Note-se que a massa total de gelo dentro do reservatório é $m = \rho_s V = 916 \times \frac{4}{3} \pi 1.5^3 = 12\,958 \text{ kg}$, em que $\rho_s = 916 \text{ kg/m}^3$ é a massa volúmica do gelo; 16% dessa massa é derretida diariamente. Para reduzir esta quantidade seria necessário isolar a parte exterior do reservatório.

Exemplo 5 – Geração interna de calor. Calcular a capacidade de transporte de electricidade de um fio de cobre com diâmetro 1.02 mm, revestido uniformemente por uma camada de isolamento plástico cujo diâmetro exterior é 3.05 mm. O plástico tem condutibilidade térmica $k_{plastic} = 0.35 \text{ W/(m } ^\circ\text{C)}$ e a máxima temperatura a que pode estar submetido é $93 \text{ } ^\circ\text{C}$. O cobre tem condutibilidade térmica $k_{cobre} = 380 \text{ W/(m } ^\circ\text{C)}$ e condutividade eléctrica $k_{e,cobre} = 5.1 \times 10^5 \text{ Ohm}^{-1} \text{ cm}^{-1}$. A temperatura do ar exterior é $38 \text{ } ^\circ\text{C}$ e o coeficiente de convecção $h_e = 8.5 \text{ W/(m}^2 \text{ } ^\circ\text{C)}$. Além da corrente eléctrica máxima, calcular ainda a temperatura no centro do fio de cobre.

Trata-se de um problema de geração interna de calor em geometria cilíndrica, semelhante ao tratado na Secção 8, com a diferença de que, agora, o calor total gerado internamente deve ser transmitido para o exterior pelo mecanismo da condução de calor, através do isolamento de plástico e, só depois, por convecção. Ou seja, o balanço global é agora:

$$\dot{q}_v V_{\text{cobre}} = \frac{(T_{si} - T_{\infty})}{R_{t,tot}} = \frac{(T_{si} - T_{\infty})}{R_{t,plastic} + R_{c,e}} = \frac{2\pi L(T_{si} - T_{\infty})}{\frac{\ln(R_2 / R_1)}{k_{plastic}} + \frac{1}{R_2 h_e}}$$

em que $V_{\text{cobre}} = \pi R_1^2 L$ é o volume do fio de cobre e T_{si} a temperatura superficial interior do isolamento (entre o fio de cobre e o plástico). Esta temperatura será a maior a que o plástico estará submetido e, portanto, deverá ser $T_{si} \leq T_{\max \text{ plast}} = 93^\circ\text{C}$. A taxa de geração interna de calor por efeito de Joule é igual à potência eléctrica produzida por uma corrente de intensidade I e diferença de potencial V , ou seja $P = VI = R_e I^2$, com a resistência eléctrica relacionada com a resistividade por $R_e = \rho_e L / A_{\text{cobre}}$ ($A_{\text{cobre}} = \pi R_1^2$, com $R_1 = 0.51 \text{ mm}$). Recorde-se ainda que a resistividade eléctrica é igual ao inverso da condutividade, $\rho_e = 1 / k_e$, com $k_e = 5.1 \times 10^5 \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} = 5.1 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Substituindo na expressão anterior, tem-se

$$R_e I^2 = \left(\frac{L}{k_e \pi R_1^2} \right) I^2 = \frac{2\pi L(T_{si} - T_{\infty})}{\frac{\ln(R_2 / R_1)}{k_{plastic}} + \frac{1}{R_2 h_e}}$$

o que dá:

$$I^2 = \frac{2k_e \pi^2 R_1^2 (T_{si} - T_{\infty})}{\left(\frac{\ln(R_2 / R_1)}{k_{plastic}} + \frac{1}{R_2 h_e} \right)}$$

O valor máximo admissível da corrente eléctrica ocorre quando $T_{si} = T_{\max \text{ plast}}$, e substituindo valores, com $R_2 = 1.525 \text{ mm}$, obtém-se:

$$I^2 = \frac{2 \times 5.1 \times 10^7 \times (\pi 0.00051)^2 (93 - 38)}{\frac{\ln(1.525 / 0.51)}{0.35} + \frac{1}{0.001525 \times 8.5}} = \frac{14\,401}{3.129 + 77.14} = 179.4 \text{ A}^2$$

ou seja,

$$I = \sqrt{179.4} = 13.4 \text{ A}$$

Se a corrente eléctrica for superior a 13.4 amperes, a temperatura na superfície interior do plástico será superior a 93°C e este poderá derreter. Repare-se que a maior resistência térmica é aquela devida à convecção exterior (77.1 K m/W); a camada de plástico age como isolamento eléctrico e não como isolamento térmico.

A temperatura no centro do fio de cobre pode ser obtida usando a expressão deduzida na Secção 8:

$$\Delta T_{int} = \frac{\dot{q}_v R_1^2}{4k}$$

que, aplicada ao presente caso, escreve-se

$$T_0 = T_{si} + \frac{\dot{q}_v R_1^2}{4k_{\text{cobre}}} \Rightarrow T_0 = 93 + \frac{5.27 \times 10^6 \times 0.00051^2}{4 \times 380} = 93.001^\circ\text{C}$$

em que

$$\dot{q}_v = \frac{R_e I^2}{A_1 L} = \frac{(\rho_e L / A_1) I^2}{A_1 L} = \frac{I^2}{k_e A_1^2} = \frac{13.4^2}{5.1 \times 10^7 \times (\pi R_1^2)^2} = 5.27 \times 10^6 \text{ W/m}^3$$

Verifica-se que a temperatura praticamente não varia no seio do fio de cobre.

Capítulo 2 – Condução de Calor em Regime Permanente. Exercícios:

- 1) Uma parede de tijolo ($k = 0.8 \text{ W/m.K}$) de 4 m x 6 m, com 30 cm de espessura, mantém uma temperatura de 14 °C na face interior e 6 °C na face exterior. Calcular a taxa de transferência de calor através da parede.
- 2) Uma janela de vidro ($k = 0.78 \text{ W/m.K}$), com dimensões 1.2 m x 2 m e espessura 6 mm, separa um ambiente interior a 24 °C, do exterior a -5 °C. Os coeficientes de transferência de calor superficial, englobando efeitos de convecção e radiação, são 10 e 25 $\text{W/m}^2\text{.K}$, respectivamente. Calcular a taxa de transferência de calor pela janela e a temperatura da face interior.
- 3) A janela do exercício anterior é substituída por outra de vidro duplo, com cada lâmina de vidro a apresentar uma espessura de 3 mm e o espaço entre vidros com ar estagnado ($k_{ar} = 0.026 \text{ W/m.K}$). Obter novamente a potência calorífica transferida, a temperatura do vidro na face interior, e comentar os resultados.
- 4) Uma casa é composta por 4 paredes de tijolo, com espessura 30 cm e condutibilidade térmica 0.69 W/m.K . A área da casa é 10 m x 15 m e a altura das paredes 3 m. A temperatura no interior da casa é mantida constante, a 20 °C, verificando-se experimentalmente que as faces interiores das paredes estão a 14 °C, enquanto a temperatura das faces exteriores varia durante o dia: 10 °C durante 10 h e 6 °C durante 14 h. Calcular: a) Taxa de transferência de calor perdido pelas paredes; b) Custo diário para o aquecimento eléctrico (preço unitário da electricidade $Y_E = 16 \text{ cent./kWh}$).
- 5) Uma resistência eléctrica de forma cilíndrica (comprimento 12 mm; diâmetro 3 mm) consome 0.15 W, dissipando calor para o ar envolvente a 40 °C, com coeficiente convectivo 9 $\text{W/m}^2\text{.K}$. a) Calor transferido durante um dia?; b) fluxo de calor na superfície da resistência; c) Temperatura superficial.
- 6) Um transistor de potência (0.2 W) é arrefecido com ar ambiente (30 °C, $h = 12 \text{ W/m}^2\text{.K}$). Assumindo que o fluxo de calor é uniforme na superfície do transistor (cilindro com 4 mm de comprimento e 5 mm de diâmetro), calcular: a) Calor transferido em 24 h (kWh); b) Fluxo de calor na superfície do transistor; c) Temperatura superficial.
- 7) Uma placa de circuitos electrónicos contém 100 chips de 70 mW colocados lado a lado na superfície superior, enquanto a superfície inferior está bem isolada. Dimensões da placa: 12 cm x 18 cm; temperatura do ar ambiente 25 °C; coeficiente convectivo 10 $\text{W/m}^2\text{.K}$. Calcular: a) Fluxo de calor na superfície da placa; b) Temperatura superficial dos chips; c) Resistência térmica entre os chips e o ambiente.
- 8) Calcular a temperatura na superfície da pele de pessoa nua em sala a 20 °C. A área superficial é 1.7 m^2 , a temperatura interior do corpo 0.5 cm abaixo da pele é 37 °C e a condutibilidade térmica dos tecidos é 0.3 W/m.K . Assumir uma taxa metabólica em repouso de 150 W, dissipada por convecção e radiação para o ambiente. Calcular ainda o coeficiente superficial de transferência de calor.
- 9) Resistências generalizadas. Uma parede de 6 m x 4 m é feita de tijolos (secção 18x30 cm, $k = 0.72 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$), revestidos por reboco (1.5 cm nas interfaces entre tijolos, em cima e em baixo; 2 cm nas faces laterais; $k = 0.22 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$), e uma camada de 2 cm de isolamento de espuma ($k = 0.026 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$). As temperaturas interior e exterior são 22 °C e -4 °C, e os respectivos coeficientes de transmissão de calor 10 e 20 $\text{W/m}^2\text{ } ^\circ\text{C}$. Calcular a taxa de transferência de calor através da parede.

- 10) Geometria cilíndrica. Uma conduta de secção circular (diâmetro 10 cm) e comprimento 50 m transporta vapor a 150 °C, temperatura praticamente igual à da face exterior da parede da conduta. Considerando que o ar ambiente exterior está a 15 °C e o respectivo coeficiente convectivo é 20 W/m² °C, calcular: a) Potência calorífica perdida pelas paredes da conduta; b) Custo anual dessa perda energética, tendo em conta que o rendimento da caldeira que produz o vapor é 75 % e o custo unitário do gás combustível que a alimenta é 52 c/termia (1 termia inglesa = 105 500 kJ); c) Espessura necessária de isolamento de fibra de vidro ($k = 0.035 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$) para diminuir a perda energética de 90 %.
- 11) Geometria cilíndrica. Calcular o calor transferido por unidade de comprimento de conduta de aço ($k = 15.1 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$), com diâmetro interior 8 cm e diâmetro exterior 8.8 cm, revestida com 3 cm de isolamento de fibra de vidro ($k = 0.035 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$). A conduta transporta vapor de água a 300 °C e a temperatura ambiente exterior é 15 °C. Os coeficientes convectivos interior e exterior são 150 e 25 W/m² K. Verificar se a resistência térmica da parede da conduta pode ser desprezada.
- 12) Geometria cilíndrica. Num condensador de ciclo de vapor, a água de arrefecimento (temperatura média 20 °C) circula em tubos de aço ($k = 386 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$) com 1 cm de diâmetro interior e 1.4 cm de diâmetro exterior. O coeficiente convectivo no interior dos tubos é 160 W/m² K. O vapor condensa a 35 °C na parte exterior dos tubos, com coeficiente convectivo 8000 W/m² K. O calor latente de condensação da água obtém-se das tabelas de vapor: $h_{fg} = 2419 \text{ kJ/kg}$. Para um caudal de vapor de 200 kg/h, qual o comprimento necessário dos tubos?
- 13) Geração de calor. Numa placa de aço ($k = 15.1 \text{ W/m K}$) de grandes dimensões laterais e espessura 3 cm existe geração de calor à taxa de 5 milhões W/m³. Existe convecção para o ar ambiente a 30°C nos dois lados da placa, com coeficiente 600 W/m² K. Calcular as temperaturas máxima e mínima na placa, e dizer qual a sua localização.
- 14) Geração de calor. Uma corrente eléctrica de 200 A circula num cabo de aço ($k = 19 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$) com 3 mm de diâmetro e 1 m de comprimento. A resistividade eléctrica do aço é $\rho_e = 70 \mu\Omega \cdot \text{cm}$. O cabo está submerso num líquido a 110 °C, com coeficiente convectivo 4 kW/m² K. Calcular a temperatura no centro do cabo.