

Efeito do parâmetro de retardamento do modelo viscoelástico FENE-CR na distribuição de velocidade em escoamento num canal curvo de secção quadrada

Joana M.Malheiro^{1a}, Paulo J.P.Oliveira^{1b} e Fernando T.Pinho²

¹UMTP^a e CEFT^b, Faculdade de Engenharia, Universidade da Beira Interior, Calçada Fonte do Lameiro, 6201-001 Covilhã, Portugal, email: joanamouramalheiro@gmail.com <http://webx.ubi.pt/~mtp/>

²CEFT, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Rua Dr. Roberto Frias s/n, 4200-465 Porto, Portugal

Sumário

Este trabalho numérico investiga o efeito do parâmetro de retardamento (β) de um modelo reológico para fluidos viscoelásticos de viscosidade constante sobre a dinâmica do escoamento num canal curvo de secção quadrada. Os resultados são apresentados sob a forma de perfis de velocidade (obtidos no plano central do canal), para diferentes números de Reynolds (Re) e Weissenberg (Wi). Verifica-se, de uma forma geral, que o efeito de β se sobrepõe aos efeitos inerciais e de elasticidade, para valores elevados de Re e Wi . Estes efeitos são observados na segunda metade do canal (após os 90°).

Palavras-chave: Método volumes-finitos, fluido viscoelástico, modelo FENE-CR, efeito do parâmetro de retardamento, canal curvo.

1 INTRODUÇÃO

Do ponto de vista hidrodinâmico, o escoamento laminar de fluidos newtonianos num canal curvo é bem conhecido. Desde que Dean [1-3] descreveu, pela primeira vez, o escoamento secundário, perpendicular ao escoamento principal, e estabeleceu uma relação entre as forças centrífugas e viscosas (número de Dean – $Dn = Re/R_c^{1/2}$), tendo identificado $Dn = 36$ como valor crítico para o seu aparecimento, que muitos investigadores se têm debruçado sobre variações do problema. Em sequência destes resultados e da importância prática que os fluidos não newtonianos possuem, vários trabalhos foram publicados sobre o escoamento deste tipo de fluidos. Joo e Shaqfeh [4-6] mostraram a existência de instabilidades puramente elásticas no escoamento com e sem inércia de um fluido Oldroyd-B, num canal curvo. Boutabaa *et al.*[7] simularam numericamente o desenvolvimento do escoamento secundário de um fluido PTT num canal com curva e sobre pressão, e mostraram que a viscoelasticidade antecipa a transição de um padrão de 2-vórtices para 4-vórtices. Helin *et al.*[8] estudaram a influência da elasticidade e da reofluidificação de um modelo PTT modificado e apontaram estes parâmetros como sendo responsáveis pelo aumento do tamanho e intensidade dos vórtices secundários presentes no escoamento. O efeito da rotação da curva sobre o escoamento secundário, o escoamento axial e a tensão normal axial, foram investigados por Zhang *et al.*[9], para um fluido Oldroyd-B, numa curva de secção quadrada. Concluíram, que todos os parâmetros avaliados são afectados pela rotação. No estudo da literatura relativo às características do escoamento sob pressão de fluidos viscoelásticos num canal com curvatura, os modelos reológicos analisados incorporam simultaneamente efeitos de elasticidade e de reofluidificação da viscosidade, sendo necessário para uma melhor compreensão a separação destes efeitos. Para cumprir este desiderato, este trabalho investiga a dinâmica de fluidos representados pelo modelo FENE-CR (*Finitely Extensible Nonlinear Elastic* com a formulação de Chilcott-Rallison) que se caracteriza por uma viscosidade de corte constante e uma elasticidade sem singularidades em escoamento extensional. São expostos resultados relativos à influência da variação do parâmetro (β) na distribuição da velocidade no plano central de um canal curvo de secção quadrada, na presença de forças inerciais e elásticas.

2 EQUAÇÕES DE GOVERNO

O escoamento considerado no presente trabalho é tridimensional, isotérmico e faz-se em regime laminar e estacionário. Os fluidos são incompressíveis e seguem os modelos reológicos newtoniano e FENE-CR. O

conjunto de equações que rege o movimento dos fluidos são a equação da conservação da massa e da quantidade de movimento:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{e} \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{tot} \quad (1)$$

onde \mathbf{u} é o vector velocidade, ρ a massa volúmica (constante), p a pressão e $\boldsymbol{\tau}_{tot}$ o tensor das tensões extra. Para uma solução polimérica homogênea o tensor das tensões ($\boldsymbol{\tau}_{tot}$) é definido pela soma da parte do solvente newtoniano ($\boldsymbol{\tau}_s$) com a parte polimérica ($\boldsymbol{\tau}$), $\boldsymbol{\tau}_{tot} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}$. As tensões de solvente e de polímero são definidas pelas equações constitutivas referentes aos modelos newtoniano e FENE-CR, respectivamente:

$$\boldsymbol{\tau}_s = \eta_s \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) = 2\eta_s \mathbf{D} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\tau} + \lambda \left(\frac{\nabla}{f(\boldsymbol{\tau})} \right) = 2\eta_p \mathbf{D} \quad (2)$$

onde $f(\boldsymbol{\tau})$ é a função de extensibilidade definida por:

$$f(\boldsymbol{\tau}) = \frac{L^2 + (\lambda/\eta_p) \text{tr}(\boldsymbol{\tau})}{L^2 - 3} \quad (3)$$

O modelo viscoelástico FENE-CR [10] tem origem no modelo FENE (que se baseia na teoria cinética de moléculas poliméricas com extensão elástica finita e não linear) [11], e foi reformulado de forma a descrever um fluido do tipo Boger (que apresenta efeitos de elasticidade e reofluidificação nas tensões normais, mas a viscosidade de corte é constante). Nas equações constitutivas, \mathbf{D} é o tensor velocidade de deformação $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$, η_s é a viscosidade de solvente, η_p é a viscosidade do polímero, λ é o tempo de relaxação e L^2 o parâmetro de extensibilidade.

Os números adimensionais considerados para neste problema são: o número de Reynolds, $Re = \rho U_m a / \eta$ (parâmetro dinâmico); o número de Weissenberg, $Wi = \dot{\gamma} \lambda$ (parâmetro constitutivo); e o parâmetro de retardamento, $\beta = \lambda_r / \lambda$ (parâmetro constitutivo). Nestas equações U_m é a velocidade média, η a viscosidade (constante) $\eta = \eta_s + \eta_p$, $\dot{\gamma}$ a razão de deformação $\dot{\gamma} = U_m / a$, λ_r é o tempo de retardamento definido como $\lambda_r = \lambda \eta_s / \eta$, e a o lado da secção transversal do canal. O raio médio de curvatura é representado por R e definido como $R = (R_1 + R_2)/2$, onde R_1 e R_2 são o raio da curva interno e externo, respectivamente.

3 METODOLOGIA

Para a resolução das equações de governo apresentadas na secção anterior é necessário recorrer a métodos numéricos que resolvam as equações diferenciais, substituindo as derivadas por equações algébricas, sendo ainda necessário assegurar que as soluções sejam precisas escolhendo adequadamente os métodos de discretização e as malhas de cálculo. Deste modo, as equações de governo são transformadas para um sistema geral de coordenadas não-ortogonais, mas mantendo as velocidades e tensões no sistema cartesiano de coordenadas para posterior aplicação do método de volumes finitos numa malha colocada. Este método garante que a discretização é conservativa em todo o domínio. O sistema de equações diferenciais é então discretizado por integração no espaço sobre volumes de controlo que compõem a malha, resultando num sistema de equações algébricas lineares. As variáveis são calculadas no centro de cada volume de controlo, sendo necessário o uso de um algoritmo que permite o acoplamento do campo das pressões e velocidades, através de um processo de correcções sucessivas da pressão e da velocidade, de forma que se verifique conservação. Este método é descrito com pormenor em Oliveira *et al.* [12]

A geometria do problema consiste num canal curvo constituído por um canal recto à entrada e outro à saída da curva, ambos com altura $a = 1$ e comprimento $L_c = 20a$. A curva de 180° , tem raio interno $R_1 = 14.6a$ e raio externo $R_2 = 15.6a$. A secção transversal do canal é sempre quadrada com uma razão de forma, k , definida pela altura do canal a sobre a largura do canal a , $k = 1$. O raio de curvatura, R , e a razão de curvatura, R_c , $R_c = R/a$

tomam o valor 15.1. A geometria considerada é semelhante à geometria utilizada por diferentes autores [7, 8, 13, 14]. A malha é não-uniforme nos canais rectos de entrada e saída, e uniforme na parte curva do canal e na direcção z em todo o comprimento do canal (Fig.1). Como condições de fronteira é imposto um escoamento estacionário e completamente desenvolvido à entrada do canal, e à saída é imposto um gradiente axial da velocidade nulo enquanto que para a pressão se considera um gradiente longitudinal constante. As paredes são rígidas e é considerado não-eskorregamento nas paredes. As propriedades do fluido são constantes.

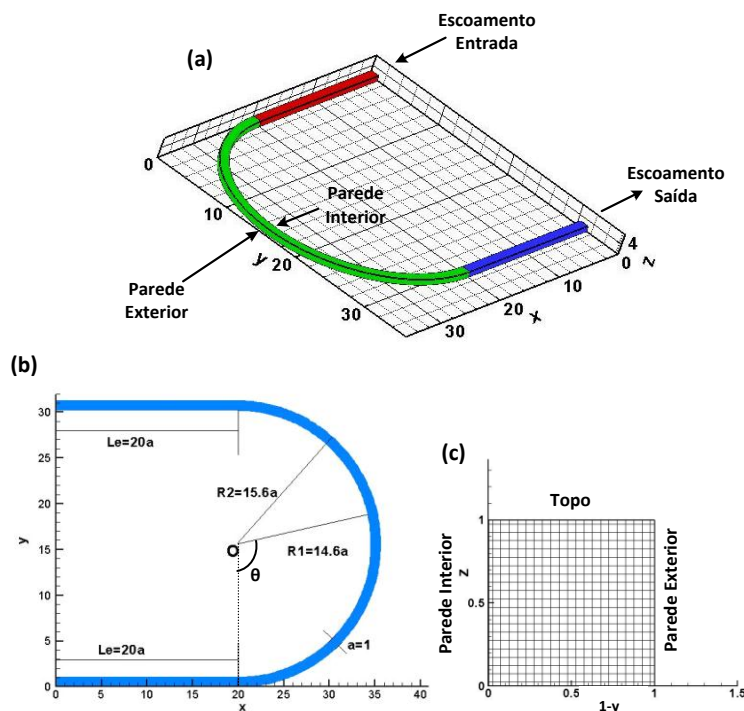


Fig.1. Geometria e malha: **a)** vista tridimensional do canal curvo; **b)** vista bidimensional do plano z do canal curvo; e **c)** vista bidimensional do plano transversal do canal curvo com representação da malha uniforme.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O modelo de fluido viscoelástico FENE-CR apresenta diferentes parâmetros independentes que podem ser variados. Estes parâmetros são: Re , Wi , L^2 e β . O número de Reynolds (Re) está estritamente relacionado com a inércia do escoamento através da razão entre as forças inerciais e as forças viscosas; o número de Weissenberg (Wi) mede a influência da razão entre as forças normais da elasticidade e a contribuição polimérica para as forças tangenciais viscosas sendo por isso proporcional ao tempo de relaxação λ (tempo de resposta do fluido quando cessa a aplicação de uma tensão); o parâmetro de extensibilidade (L^2) que define o comportamento elongacional do fluido; e o parâmetro de retardamento (β) que relaciona o tempo de retardamento com o tempo de relaxação.

O interesse do trabalho centra-se na análise da distribuição da velocidade no plano central da parte curva do canal do escoamento em função do parâmetro de retardamento β e em condições de forte presença de forças inerciais e elásticas, para uma determinada viscosidade elongacional. Para isso são apresentados perfis de velocidade para diferentes números de Reynolds ($Re = 486, 532, 583$ e 1760 , valores usados por [7, 8, 13 e 14]), fazendo variar o número de Weissenberg de 0.1 a 1.0 , e considerando uma extensibilidade constante, $L^2 = 100$. O parâmetro de retardamento β é variado desde $\beta = 1$, que representa o caso newtoniano, até $\beta = 0.10$. Os resultados são apresentados para diferentes posições na curva (de 0° a 180°) e comparados com o caso newtoniano.

4.1 $Re = 486$ ($Dn = 125$)

A Fig.2 apresenta os perfis transversais de velocidade longitudinal para $Wi = 0.5$ em diferentes posições angulares ao longo da curva (de 30° a 180°). Neste caso específico, verifica-se que o efeito de β só é notado a

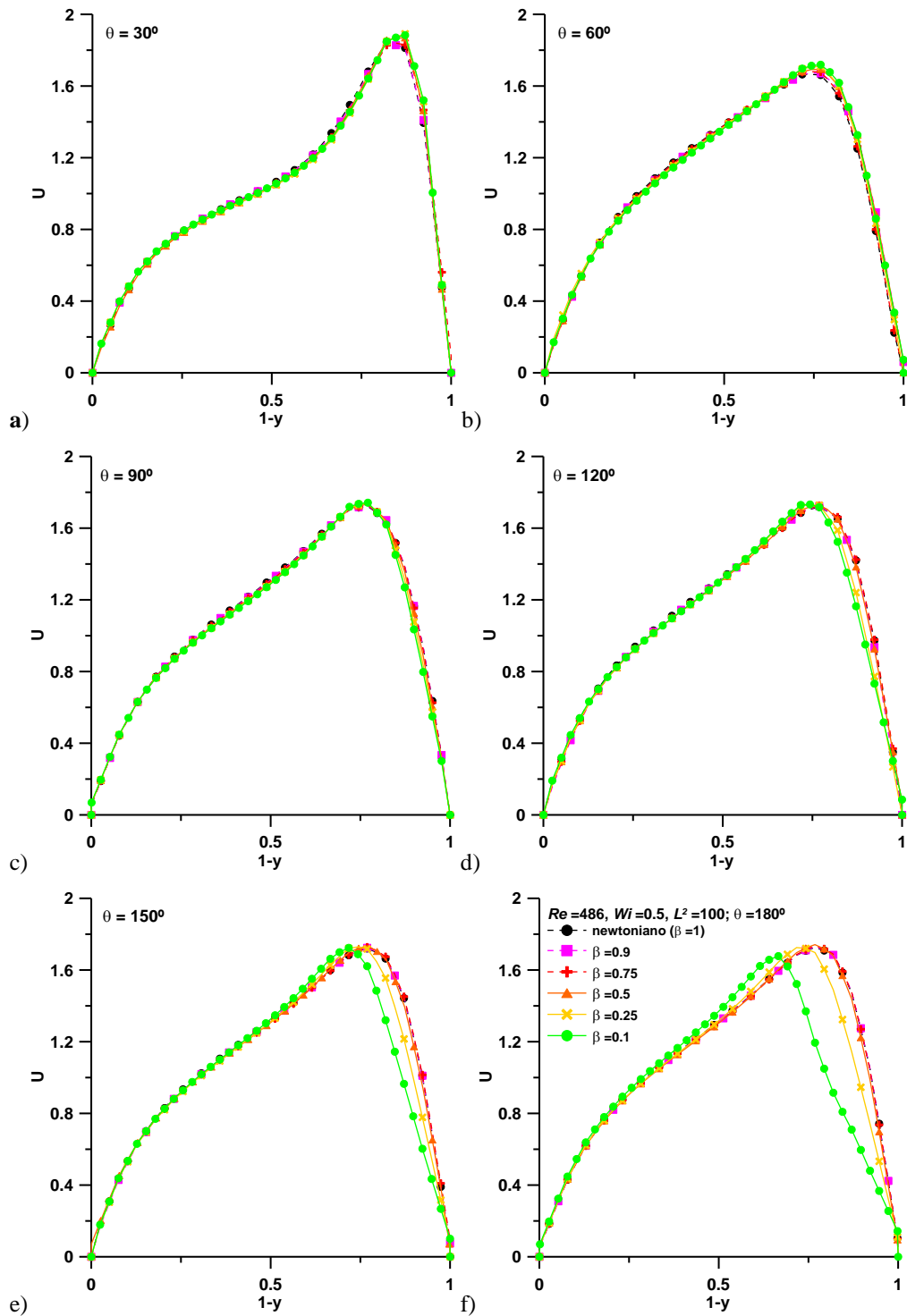
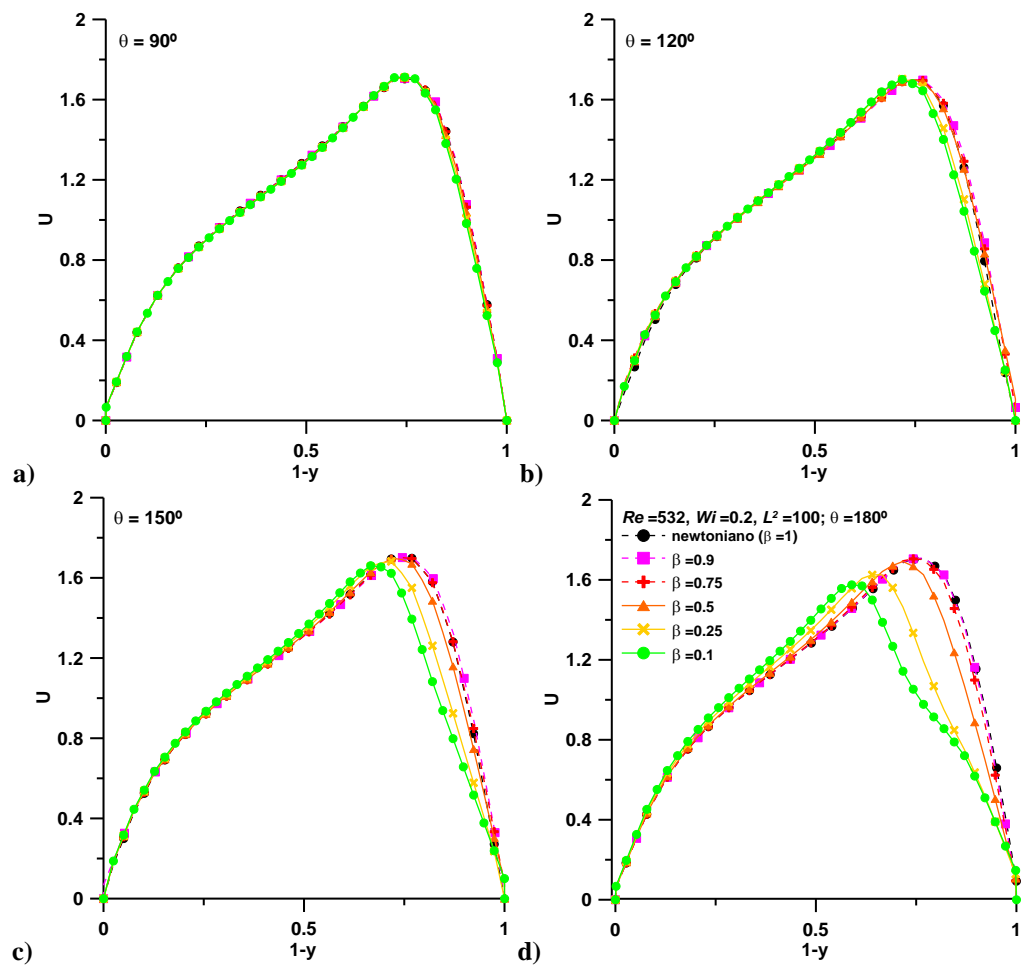
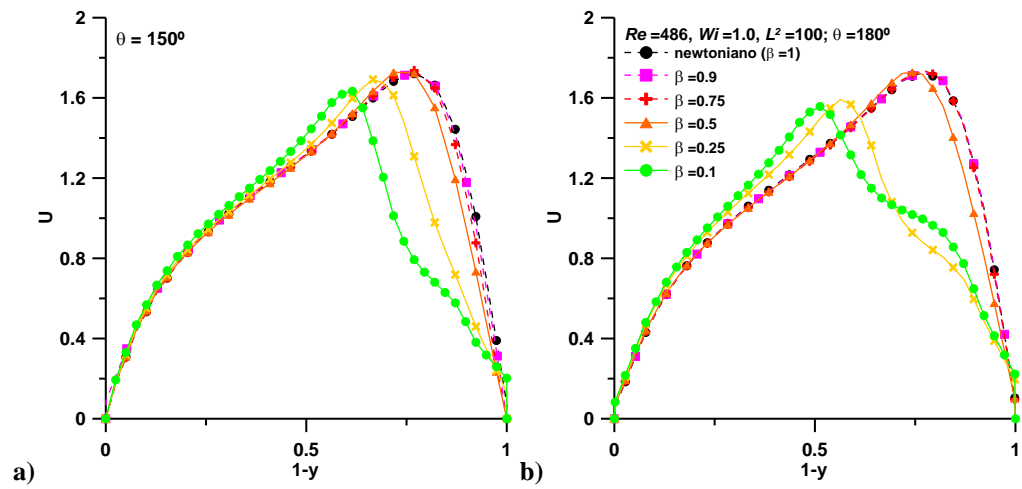


Fig.2. Velocidades para $Re = 486$, $Wi = 0.5$, e $L^2 = 100$: a) 30° ; b) 60° ; c) 90° ; d) 120° ; e) 150° ; f) 180° .



partir dos 120° , com deslocamento da velocidade máxima do perfil na direcção do centro do canal ($1-y = 0.5$) para valores de $\beta \leq 0.25$. Este comportamento é verificado para valores de $Wi \geq 0.4$, no entanto à medida que Wi aumenta o mesmo comportamento intensifica-se (i.e. o deslocamento da velocidade máxima na direcção do centro do canal é maior). A Fig.3, que representa os perfis de velocidade para $Wi = 1.0$ nas posições 150° e 180° na curva, mostra isso mesmo por comparação com as Fig.2e e Fig.2f. Observa-se que diminuindo β , o deslocamento da velocidade máxima na direcção do centro do canal é mais acentuado e acontece apenas para valores $\beta \leq 0.25$. No final da curva (180°), enquanto que para $Wi = 0.5$ a velocidade máxima localiza-se em $1-y = 0.67$, para $Wi = 1.0$ ela localiza-se em 0.51 para as curvas com $\beta = 0.1$. Para valores de elasticidade menores que 0.4 , as forças elásticas são fracas e o comportamento começa a tender para escoamento de um fluido newtoniano com o mesmo número de Reynolds, deixando por isso de haver efeito do parâmetro de retardamento (note-se que o número de Reynolds está definido com base na soma dos dois coeficientes de viscosidade, pelo que se torna indiferente a distribuição de η por η_p e η_s , para tempo de relaxação a tender para zero).

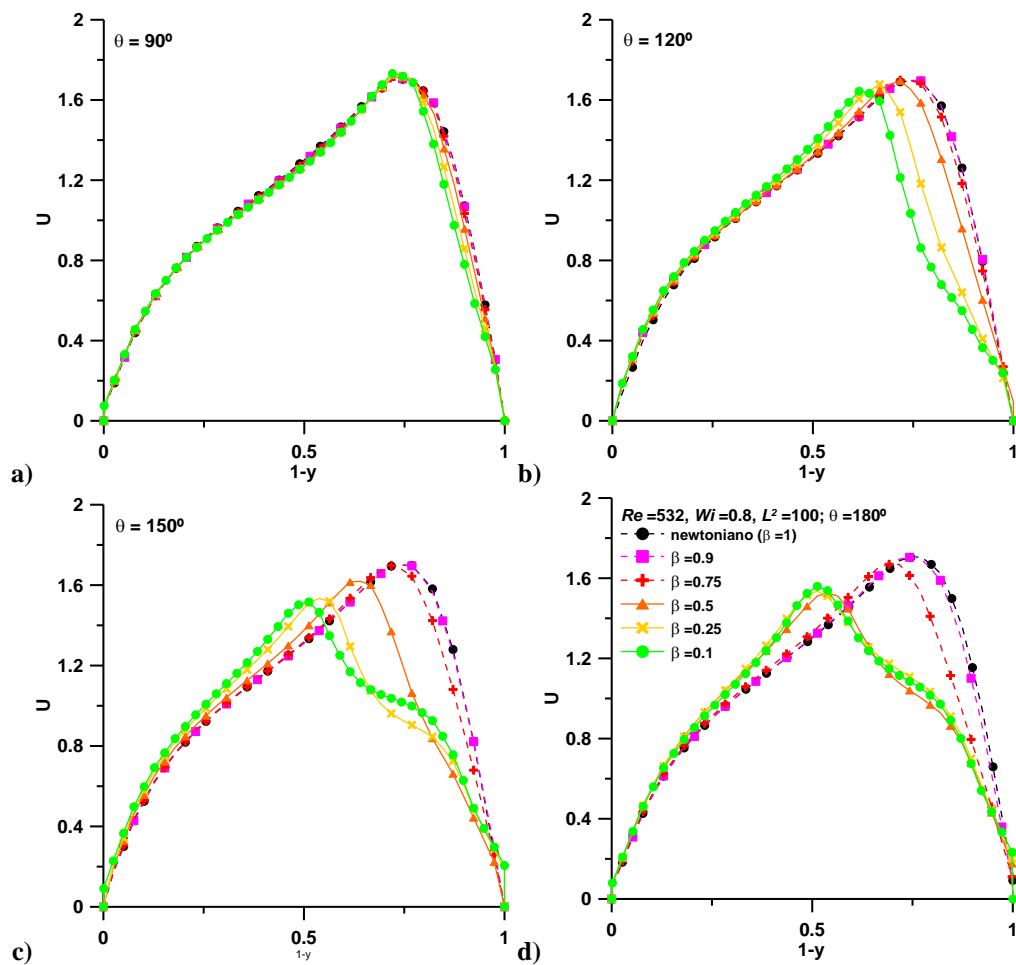


Fig.5. Velocidade para $Re = 532$, $Wi = 0.8$, e $L^2 = 100$: a) 90° ; b) 120° ; c) 150° ; d) 180° .

4.2 $Re = 532$ ($Dn = 137$)

À semelhança do número de Reynolds anterior, o fenómeno de deslocação da velocidade máxima verifica-se também para $Re = 532$. No entanto, esse comportamento é observado para valores de Wi mais baixos, inferiores a 0.4 , tal como se pode observar na Fig.4, que mostra os perfis de velocidade para $Wi = 0.2$. Uma vez mais, β não afecta o desenvolvimento da velocidade até à posição angular de 120° , a partir da qual se verifica o deslocamento da velocidade máxima na direcção o centro do canal, mas apenas para $\beta < 0.5$. O mesmo se

verifica, mas com maior intensidade, quer para valores superiores de Wi quer na direcção da saída da curva. Pode-se verificar na Fig.5, para $Wi = 0.8$, que no final da curva (entre os 150° e os 180°), apenas a curva correspondente a $\beta = 0.9$ mantém o comportamento semelhante ao caso newtoniano (velocidade máxima localizada a $1-y = 0.74$ para 150° e 180°), e a distorção dos perfis de velocidade ocorre para β maiores do que no caso anterior. Estes resultados sugerem então que a deslocação do pico de velocidade para o centro da conduta não é exclusivamente um fenómeno elástico, mas resulta de uma forte interacção não linear entre forças elásticas e inerciais.

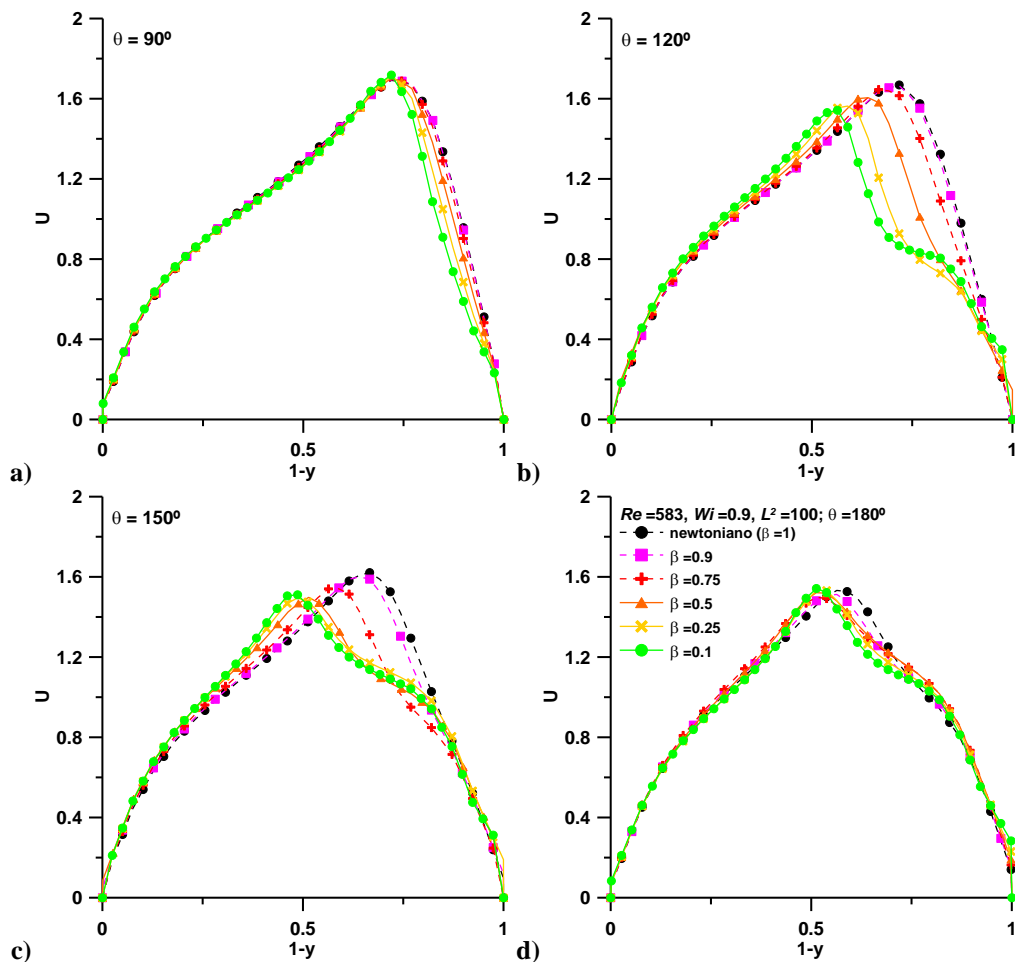


Fig.6. Velocidade para $Re = 583$, $Wi = 0.9$, e $L^2 = 100$: a) 90° ; b) 120° ; c) 150° ; d) 180° .

4.3 $Re = 583$ ($Dn = 150$)

Para o número de Reynolds igual a 583 (Fig.6), observa-se um acontecimento distinto. Entre os 90° e os 120° as diferenças entre as curvas aumentam com o valor de β , tal como no caso anterior (Fig.5b), com a diminuição do parâmetro de retardamento a implicar maior deslocamento da velocidade máxima na direcção do centro do canal. No entanto, à medida que o escoamento se aproxima do final do canal (a partir dos 150°) a diferença entre as curvas diminui, e aos 180° os perfis de velocidade quase se sobrepõem (Fig.6d). O mesmo comportamento é observado para todos os valores de elasticidade simulados ($0.1 \leq Wi \leq 1.0$), para este número de Reynolds específico. Esta situação entende-se porque, para este Re , o próprio escoamento newtoniano já desenvolveu o segundo par de vórtices secundários perto da saída da curva ($\theta = 180^\circ$), enquanto no escoamento viscoelástico isso acontece mais cedo, dependendo dos efeitos viscosos e elásticos (menores β).

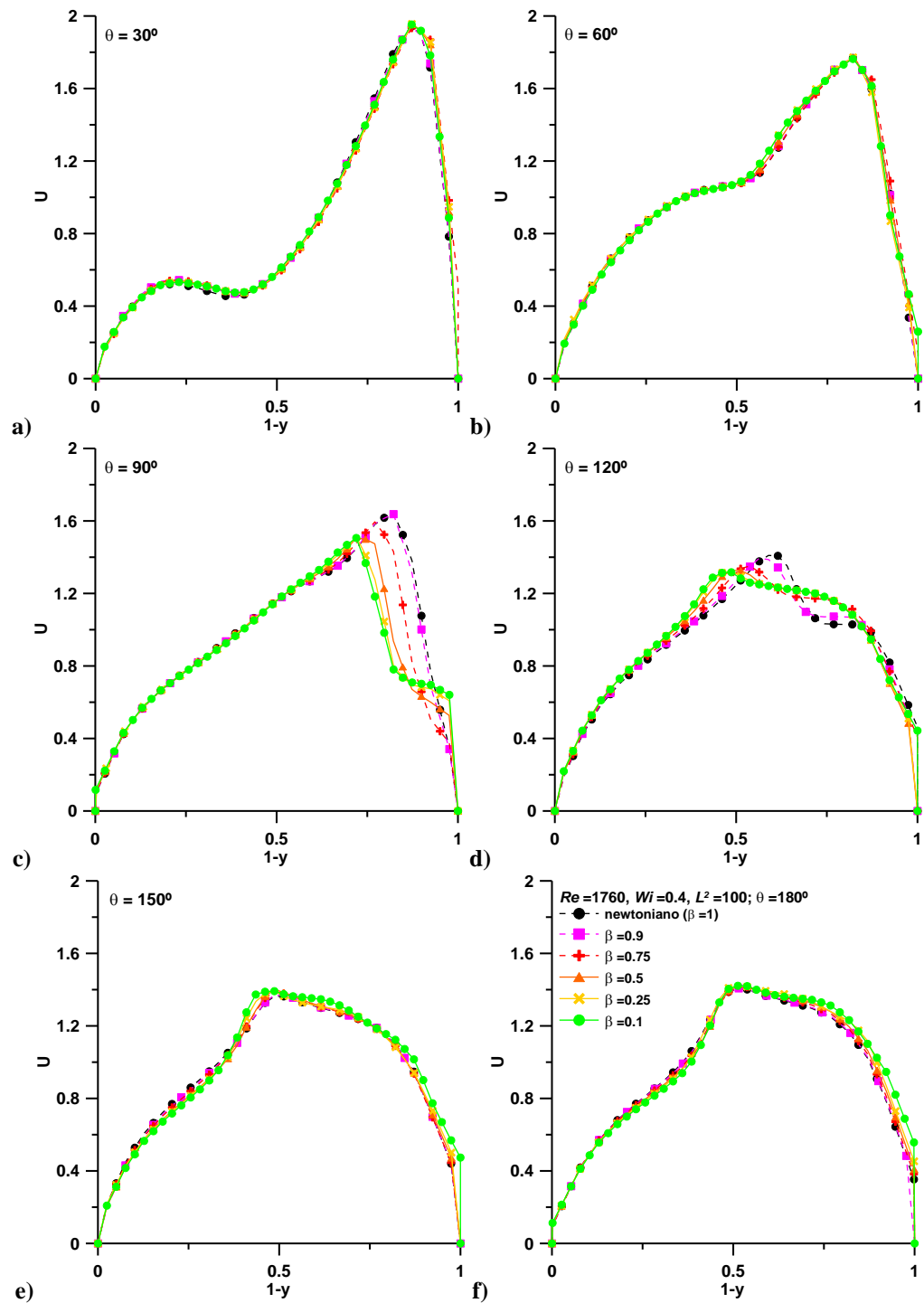


Fig.7. Velocidade para $Re = 1760$, $Wi = 0.4$, e $L^2 = 100$: a) 30° ; b) 60° ; c) 90° ; d) 120° ; e) 150° ; f) 180° .

4.4 $Re = 1760$ ($Dn = 453$)

Aumentando a inércia para $Re = 1760$, verifica-se que para $Wi \leq 0.4$ as diferenças provocadas pelo efeito do aumento de β localizam-se entre $90^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$, zona da curva em que o segunda par de vórtices de estabelece,

estando os perfis de velocidade sobrepostos a jusante e a montante desta região (Fig.7). Mas para valores de elasticidade superiores ($Wi > 0.4$) verifica-se um fenómeno particular: a velocidade máxima para valores de $\beta < 0.5$ tende a deslocar-se na direcção da parede lateral exterior da secção transversal, desde 90° até ao final da curva, tal como é mostrado na Fig.8, para o caso $Wi = 0.9$. Aparentemente este fenómeno está associado ao desenvolvimento de assimetrias no padrão de escoamento secundário: o duplo par de vórtices deixa de ser simétrico relativamente ao plano $z = 0.5$, que define a simetria geométrica.

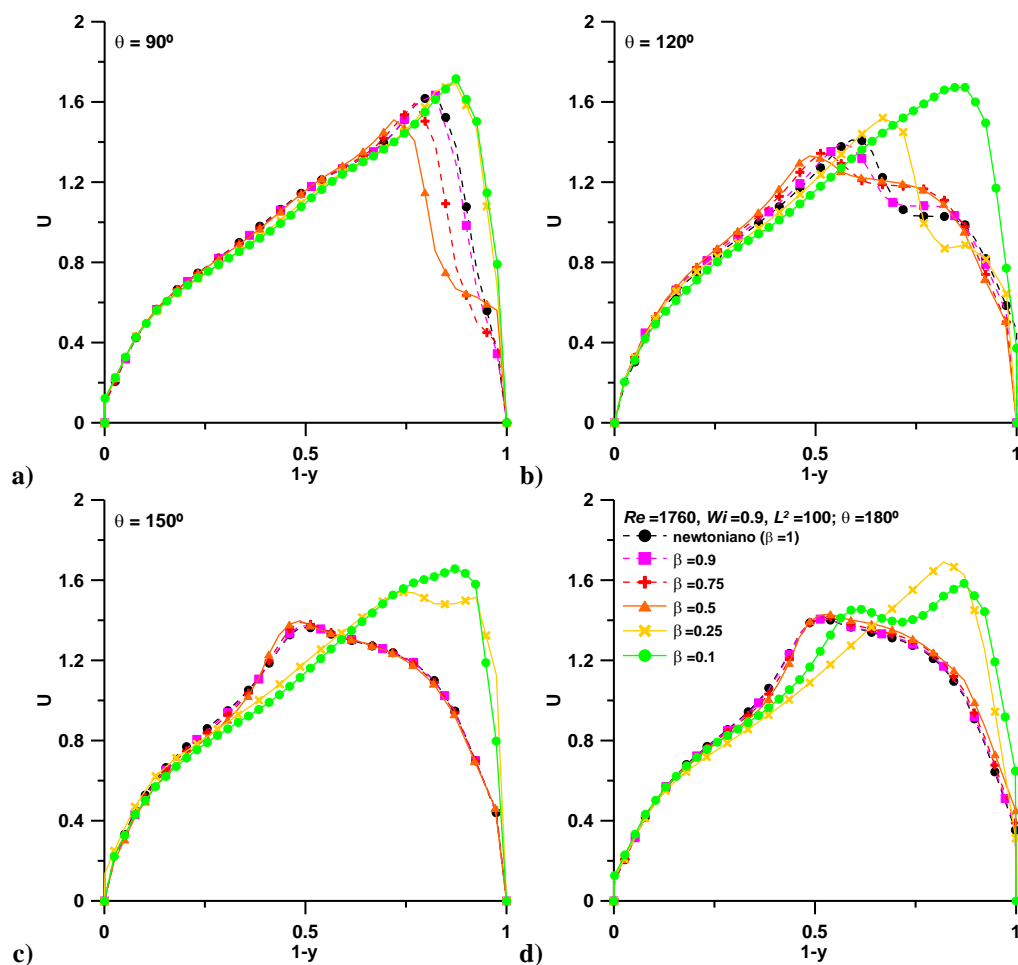


Fig.8. Velocidade para $Re = 1760$, $Wi = 0.9$, e $L^2 = 100$: a) 90° ; b) 120° ; c) 150° ; d) 180° .

5 CONCLUSÕES

O desenvolvimento do escoamento ao longo da primeira metade de um canal curvo de 180° realiza-se de forma semelhante para fluidos newtonianos e não-newtonianos, quando é imposto escoamento completamente desenvolvido à entrada. O escoamento entra na curva com se ainda estivesse a fluir num canal recto e vai de encontro à parede exterior da secção transversal, empurrando a velocidade máxima nesse sentido. Depois, até chegar aos 90° (i.e. a meio da curva), a velocidade máxima mantém-se junto à parede lateral exterior. Até este ponto, o escoamento é dominado pela inércia para qualquer valor de elasticidade e em toda a gama de parâmetros de retardamento considerados. Na segunda metade do canal (dos 90° aos 180°) começam a notar-se os efeitos viscosos e elásticos implícitos no parâmetro β . Para os valores mais baixos de Re (486 e 532), quando $\beta \leq 0.5$ a velocidade máxima dos perfis de velocidade é empurrada no sentido do centro da secção transversal do canal, para todos os valores de elasticidade considerados. Este comportamento ocorre para valores mais baixos de Wi para o caso de $Re = 532$ ($Wi \geq 0.2$) do que para o caso de $Re = 486$ ($Wi \geq 0.4$). Em toda a gama de valores

de Wi considerados, aumentando a inércia, o parâmetro de retardamento afecta o escoamento da mesma forma, no entanto, à saída da curva (180°), os perfis de velocidade sobrepõem-se, revelando domínio inercial no escoamento. Quando Re é aumentado até 1760, β comanda a distribuição da velocidade de escoamento apenas na região $90^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$ para valores de $Wi \leq 0.4$, deslocando a velocidade máxima para o centro do canal. As outras regiões da curva são dominadas pela inércia. No entanto, para $Wi > 0.4$ o efeito do parâmetro de retardamento no escoamento sobrepõe-se mais uma vez aos efeitos inerciais e elásticos. E na segunda metade da curva ($\theta \geq 90^\circ$), β faz deslocar o máximo da velocidade no sentido da parede exterior da secção transversal. Este comportamento é observado para $\beta \leq 0.25$.

6 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro à Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), através da bolsa de doutoramento SFRH/ BD/ 68357/ 2010 e do projecto PTDC/EME-MFE/114322/2009 do programa COMPETE do FEDER.

REFERÊNCIAS

1. W.R. Dean, Note on the notion of fluid in a curved pipe, *Philosophical Magazine*, 4(20): 208-223, 1927.
2. W. R. Dean, The stream-line motion of fluid in a curved pipe, *Philosophical Magazine*, 5(30): 673-695, 1928.
3. W.R. Dean, Fluid motion in a curved channel, *Proceedings of the Royal Society of London A*, 121: 402-420, 1928.
4. Y.L. Joo, E.S.G. Shaqfeh, Viscoelastic Poiseuille flow through a curved channel: A new elastic instability, *Physics of Fluids A*, 3(9):2043-2046, 1991.
5. Y.L. Joo, E.S.G. Shaqfeh, A purely elastic instability in Dean and Taylor-Dean flow, *Physics of Fluids A*, 4(3):524-543, 1992.
6. Y.L. Joo, E.S.G. Shaqfeh, The effects of inertia on the viscoelastic Dean and Taylor-Couette flow instabilities with application to coating flows, *Physics of Fluids A*, 4(11): 2415-2431, 1992.
7. M. Boutabaa, L. Helin, G. Mompean, L. Thais, Numerical study of Dean vortices in developing Newtonian and viscoelastic flows through a curved duct of square cross-section, *C. R. Mecanique*, 337: 40-47, 2009.
8. L. Helin, L. Thais, G. Mompean, Numerical simulation of viscoelastic Dean vortices in a curved duct, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 156: 84-94, 2009.
9. M.-K. Zahng, X.-R. Shen, J.-F. Ma, B.-Z. Zhang, Flow of Oldroyd-B in rotating curved square ducts, *J. Hydrodynamics*, 19(1): 36-41, 2007.
10. D.M. Chilcott, J.M. Rallison, Creeping flow of dilute polymer solutions past cylinders and spheres, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 29: 381-432, 1988.
11. R.B. Bird, C.F. Curtiss, R.C. Armstrong, O. Hassager, Dynamics of Polymeric Liquids: Vol. 2: Kinetic Theory, John Wiley & Sons, New York, 1987.
12. P.J. Oliveira, F.T. Pinho, G.A. Pinto, Numerical simulation of non-linear elastic flows with a general collocated finite-volume method, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 79: 1-43, 1998.
13. B. Bara, K. Nandakumar, J.H. Masliyah, An experimental and numerical study of the Dean problem: flow development towards two-dimensional multiple solutions, *J. Fluid Mech.*, 244: 339-376, 1992.
14. P.A.J. Mees, K. Nandakumar, J.H. Masliyah, Instabilities and transitions of flow in a curved square duct: the development of two pairs of dean vortices, *J. Fluid Mech.*, 314: 227-246, 1996.