

# Aferição de um método de volumes finitos: cálculo de escoamentos viscoelásticos simples em regime variável

A. S. R. Duarte\* e P. J. P. Oliveira\*

\* Departamento de Engenharia Electromecânica, Unidade de Materiais Têxteis e Papeleiros

Universidade da Beira Interior

Calçada Fonte do Lameiro – Covilhã

Telf: +351 275 329 925; fax: +351 275 329 972; e-mail: [pjpo@ubi.pt](mailto:pjpo@ubi.pt)

**Resumo** — O escoamento não-estacionário de fluidos viscoelásticos assume um papel relevante em diversos processos industriais. Neste trabalho, pretende-se testar um programa de simulação numérica, baseado no método dos volumes finitos e adaptado de forma a permitir o cálculo eficiente de problemas unidimensionais não-estacionários. O problema de referência é o “escoamento de arranque” plano de *Poiseuille*. Obtiveram-se resultados numéricos para fluidos UCM e Oldroyd-B e verificou-se que as soluções analíticas são reproduzidas numericamente. Para o mesmo problema, analisaram-se ainda escoamentos com o fluido PTT.

## 1. Introdução

A complexidade matemática da reologia, normalmente, força os investigadores a usarem métodos computacionais de forma a obterem soluções efectivas para muitos problemas que surgem na prática. Nas últimas duas décadas, os investigadores na área da reologia computacional desenvolveram algoritmos numéricos estáveis para resolverem problemas de escoamentos estacionários de fluidos viscoelásticos – ver, por exemplo, Keunings [1] ou Baaijens [2] como artigos de revisão. Apesar de se ter evoluído bastante na obtenção de uma resposta numérica para problemas de escoamentos estacionários com elevada viscoelasticidade, pouco trabalho se tem desenvolvido sobre problemas de escoamentos não-estacionários.

Contudo, os escoamentos dependentes do tempo revelam-se importantes em diversos processos industriais envolvendo materiais viscoelásticos, e.g., injeção de termoplásticos e outros processos industriais de formação; para além de existir um interesse intrínseco no seu estudo. Desta forma, a investigação do comportamento de fluidos viscoelásticos em escoamentos dependentes do tempo, bem como o estudo da capacidade de previsão das equações constitutivas que modelam este tipo de escoamento são extremamente úteis na compreensão das propriedades reológicas dos materiais em causa e do seu processamento. Têm surgido algumas tentativas de cálculo numérico de escoamentos não-estacionários baseadas no método dos volumes finitos (FVM), (e.g., [3], [4]), e foram também desenvolvidos alguns trabalhos baseados numa combinação do método dos volumes finitos e do método dos elementos finitos (FVM/FEM) (ver [5], [6]).

Neste trabalho, pretende-se testar um programa de simulação numérica desenvolvido por P.J. Oliveira [7],

baseado no método dos volumes finitos e recentemente adaptado para resolver problemas de escoamentos viscoelásticos não-estacionários.

O problema de referência (em inglês *benchmark problem*) a estudar, é o escoamento num canal, resultante da aplicação instantânea e espacialmente constante de um gradiente de pressão a um fluido em repouso. Este escoamento denomina-se “escoamento de arranque” (em inglês *start-up flow*) e é dependente do tempo. Assumindo que o escoamento é completamente desenvolvido, i.e., não há variações da velocidade ao longo do canal, torna-se possível obter uma solução analítica para as equações do movimento. No caso dos fluidos newtonianos, essa solução é conhecida e encontra-se descrita em diversos livros da especialidade (e.g., White *et al* [8]). Contudo, este trabalho centra-se sobre fluidos não-newtonianos com propriedades viscoelásticas.

Para fluidos obedecendo a modelos baseados nas equações constitutivas de Maxwell e Oldroyd, fluidos UCM e Oldroyd-B respectivamente, existe uma solução analítica determinada por Waters e King [9], formalmente correspondente a uma série infinita de funções transcendentais e que foi programada em linguagem FORTRAN.

Os resultados das simulações numéricas obtidos para estes fluidos descritos pelas equações constitutivas de Oldroyd e Maxwell, para diferentes valores do número elástico, foram comparados com as respectivas soluções analíticas e verificou-se uma boa concordância. Os erros de discretização espacial e temporal foram avaliados através de simulações com malhas sucessivamente refinadas e com passos no tempo progressivamente menores, respectivamente. Apesar dos modelos UCM e Oldroyd-B apresentarem propriedades elásticas e viscosas, eles são relativamente simples e apresentam algumas restrições em determinadas situações pelo que se tornou necessário desenvolver outros modelos. Neste trabalho, utiliza-se o modelo PTT (Phan-Thien-Tanner) deduzido com base em modelos de redes moleculares (Bird *et al.* [10]), e que tem em conta características como a viscosidade extensional e o efeito reofluidificante (*shear-thinning*).

O artigo está organizado da seguinte forma: as equações do governo e dos modelos constitutivos são descritas na secção 2; os aspectos específicos relativos ao problema do escoamento em estudo são desenvolvidos na secção 3, e na secção 4 apresentam-se e discutem-se os resultados obtidos.

## 2. Equações do governo

Nesta secção apresentam-se as equações básicas da conservação bem como as relações constitutivas dos modelos UCM, Oldroyd-B e PTT, para um escoamento viscoelástico isotérmico e incompressível.

### A. Equações da conservação

As equações da conservação que regem o escoamento são as que expressam a conservação da massa:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

e da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2)$$

Nestas equações  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  e  $p$  são a densidade, velocidade e pressão do fluido;  $\mathbf{T}$  é o tensor das tensões dado por  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}$ , onde  $\boldsymbol{\tau}_s$  é a tensão do solvente dada pela lei newtoniana ( $\boldsymbol{\tau}_s = 2\eta_s \mathbf{D}$ ;  $\eta_s$  é a viscosidade do solvente e  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ ) e  $\boldsymbol{\tau}$  é a tensão do polímero que deve ser obtida a partir de uma equação constitutiva adicional.

### B. Modelos constitutivos

O modelo de Maxwell para o escoamento de um fluido viscoelástico é um modelo linear. Quando o modelo é generalizado para escoamentos arbitrários sob a forma tensorial e, em vez da derivada parcial, é usada a derivada convectiva superior do tempo obtém-se o modelo UCM (*quasi-linear Upper Convected Maxwell model*). A equação constitutiva deste modelo é dada pela seguinte expressão:

$$\lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} = 2\eta_p \mathbf{D} \quad (3)$$

Onde  $\lambda$  é o tempo de relaxação do fluido,  $\eta_p$  é a viscosidade do fluido e  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$  é a derivada convectiva superior do tensor das tensões em ordem ao tempo definida por:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau} - \nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \quad (4)$$

O valor do tempo de relaxação indica a extensão da componente elástica do fluido. Para um tempo de relaxação zero obtém-se a equação constitutiva newtoniana.

O modelo Oldroyd-B deriva do modelo de Jeffreys quando as derivadas parciais do tempo são substituídas por derivadas convectivas superiores. A equação constitutiva para este modelo é a seguinte:

$$\mathbf{T} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\eta_0 (\mathbf{D} + \lambda_2 \overset{\nabla}{\mathbf{D}}) \quad (5)$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os tempos de relaxação e retardação do fluido, respectivamente,  $\eta_0$  é a viscosidade correspondente à soma da viscosidade do polímero com a viscosidade do solvente, e  $\mathbf{T}$  é o tensor das tensões já definido, onde  $\boldsymbol{\tau}$  satisfaz o modelo UCM. As viscosidades  $\eta_s$  e  $\eta_p$  estão relacionadas da seguinte forma:

$$\eta_0 = \eta_p + \eta_s \quad \lambda_2 = \frac{\eta_s}{\eta_0} \lambda_1 \quad (6)$$

Se o tempo de retardação for igual a zero, o modelo obtido é equivalente ao modelo UCM. Verifica-se assim que a relação constitutiva baseada no modelo de Oldroyd é equivalente a uma combinação linear do modelo UCM e do modelo newtoniano.

A equação constitutiva para um fluido Phan-Thien-Tanner (PTT) pode ser escrita de uma forma geral como

$$f(tr(\boldsymbol{\tau})) \boldsymbol{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta_p \mathbf{D} \quad (7)$$

As duas expressões mais comuns do modelo PTT são a forma linear, onde a função  $f$  é dada pela seguinte expressão:

$$f(tr(\boldsymbol{\tau})) = 1 + \frac{\varepsilon \lambda}{\eta_p} tr(\boldsymbol{\tau}) \quad (8)$$

e na forma exponencial é dada por

$$f(tr(\boldsymbol{\tau})) = \exp\left(\frac{\varepsilon \lambda}{\eta_p} tr(\boldsymbol{\tau})\right) \quad (9)$$

Em ambas as formas  $\varepsilon$  é um parâmetro relacionado com o comportamento extensional do modelo e  $tr$  é o operador traço. Note-se que a forma linear resulta da forma exponencial quando o traço do tensor das tensões é pequeno e que ambas as formas se reduzem ao modelo UCM quando  $\varepsilon$  desaparece.

## 3. Descrição do problema

O problema de referência que se pretende analisar é a geração de um escoamento plano de *Poiseuille* para um fluido viscoelástico. Este escoamento entre dois pratos paralelos, dependente do tempo, resulta da aplicação instantânea e espacialmente constante de um gradiente de pressão e denomina-se “escoamento de arranque” (em inglês *start-up flow*) como já tinha sido referido.

Como o problema é essencialmente unidimensional na direcção transversa, a pressão deixa de ser uma incógnita e a equação constitutiva para as tensões reduz-se a uma equação diferencial ordinária. Este escoamento, em particular, foi analisado por diversos autores (ver Xue *et al.* [3], Webster *et al.* [5], Sato e Richardson [6], Waters e King [9]).

A normalização para a distância é feita em relação a metade da distância entre os dois pratos,  $h$ , para a velocidade, é feita em relação à velocidade média da linha central,  $\bar{U}$ , e para o tempo é feita com o tempo de relaxação  $\lambda$ .  $C$  denomina o gradiente de pressão imposto e  $E$  é o número elástico.

A solução para o “escoamento de arranque” plano de *Poiseuille*, no caso dos modelos UCM e Oldroyd-B, foi obtida por N. D. Waters e M. J. King [9] e tem a seguinte forma, de acordo com a não-dimensionalização utilizada:

$$U(T, Y) = 1.5(1.0 - Y^2) - 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{Y+1}{2}\right) \times N}{N^3} e^{-\left(\frac{\alpha_n T}{2}\right)} G(T) \quad (10)$$

onde

$$G(T) = \cosh\left(\frac{\beta_n T}{2}\right) + \frac{\gamma_n}{\beta_n} \sinh\left(\frac{\beta_n T}{2}\right) \quad (11)$$

e

$$U(T, Y) = \frac{u(t, y)}{\bar{U}}; \quad \bar{U} = \frac{h^2 C}{3\eta_0}; \quad T = \frac{t}{\lambda}$$

$$N = (2n-1)\pi; \quad Y = \frac{y}{h}; \quad \alpha_n = 1 + \frac{\beta EN^2}{4} \quad (12)$$

$$\beta_n = \sqrt{\alpha_n^2 - EN^2}; \quad \gamma_n = 1 - \frac{(2-\beta)EN^2}{4}$$

O número elástico,  $E$ , relaciona os números de Weissenberg ( $We$ ) e Reynolds ( $Re$ ). Estes números são definidos da seguinte forma:

$$E = \frac{We}{Re}; \quad We = \frac{\lambda \bar{U}}{h}; \quad Re = \frac{\rho \bar{U} h}{\eta_0} \quad (13)$$

Para os casos em que  $\alpha_n^2 - EN^2 < 0$ , a função  $G(T)$  assume a seguinte forma:

$$G(T) = \cos\left(\frac{\beta_n T}{2}\right) + \frac{\gamma_n}{\beta_n} \sin\left(\frac{\beta_n T}{2}\right) \quad (14)$$

onde agora  $\beta_n = \sqrt{EN^2 - \alpha_n^2}$ .

Note-se que o caso UCM é obtido colocando  $\beta=0$  na solução dada em cima. Este valor representa a relação entre a viscosidade do polímero e a viscosidade do solvente e é dado pela seguinte expressão:

$$\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}; \quad \eta_0 = \eta_p + \eta_s \quad (15)$$

Para o caso estudado, a distância entre os dois pratos paralelos é 2 (2x1), e é imposto subitamente um gradiente de pressão -3 ao longo da direcção principal, para um tempo não dimensional  $T=0$ , sobre o fluido que se encontra em repouso.

Em todos os cálculos efectuados, a não ser que o contrário seja indicado, foram utilizados 100 volumes de controlo uniformes para discretizar o domínio na direcção transversa, ou seja,  $\Delta y=0.01$ . Foram analisados os casos em que  $E=1, 10$  e  $100$ .

Para avaliar a precisão das soluções em relação ao tempo foi determinado o erro através da norma Euclidiana,  $e(T)$ , da velocidade axial normalizada ao longo da linha central  $Y=0$  definido como:

$$e(T) = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_i (U_h(Y, T) - U(Y, T))^2} \quad (16)$$

O erro devido à discretização do domínio, foi determinado usando malhas sucessivamente refinadas e utilizando uma expressão análoga à anterior.

Na expressão do erro,  $U_h(Y, T)$  define as previsões numéricas.

#### 4. Discussão dos resultados

Nesta secção são apresentados os resultados obtidos relativamente ao problema descrito na secção anterior. Inicialmente, é analisado o “escoamento de arranque” de um fluido puramente elástico (fluido UCM) e são

estudadas a precisão temporal e espacial. Apresentam-se ainda alguns perfis de velocidade. De seguida, esta análise é estendida a outros modelos como o Oldroyd-B e PTT.

##### A. Análise não-estacionária do “escoamento de arranque” de um fluido UCM

Nesta secção é considerado o fluido UCM, que é um fluido puramente elástico, e este caso é obtido colocando  $\beta=0$  nas equações. Foram obtidas soluções analíticas e numéricas para diferentes valores de elasticidade, nomeadamente 1, 10 e 100.

Para avaliar o erro de discretização espacial utilizaram-se malhas com 50, 100 e 200 volumes de controlo uniformes. O caso analisado é o “escoamento de arranque” de um fluido UCM com um número elástico 1. Nos instantes iniciais do *start-up*, logo a seguir à aplicação do gradiente de pressão, verifica-se que com o refinamento da malha o erro de discretização também vai diminuindo. Isto pode ser observado na tabela I, que apresenta os erros calculados para alguns tempos críticos observados no gráfico que exprime a evolução da velocidade da linha central ( $Y=0$ ) ao longo do tempo (ver figura 1;  $\Delta T=1.25 \times 10^{-3}$ ).

**Tabela I.**  
Erro de discretização espacial das malhas 1, 2 e 3 com 50, 100 e 200 volumes de controlo respectivamente para  $E=1$ .

$T$	$e(T) (x10^{-4})$		
	Malha1	Malha2	Malha3
0.01	5.91	2.51	1.41
0.05	9.68	3.40	1.53
0.80	16.7	5.18	1.86
1.00	16.7	5.19	1.78

Optou-se por usar a malha 2 (100 volumes de controlo) ao longo de todo o trabalho por oferecer bons resultados a nível de precisão e tempo computacional.

Para avaliar o erro de discretização temporal, foram simulados escoamentos utilizando diferentes passos no tempo como se verifica na tabela II.

**Tabela II.**  
Erro de discretização temporal da malha 2 obtido para diferentes passos no tempo para  $E=1$ .

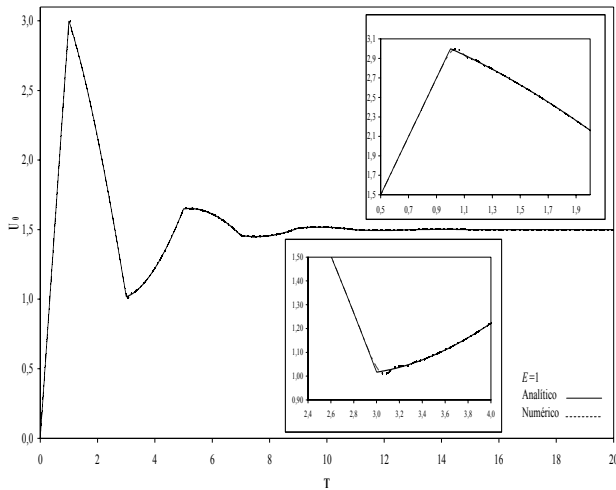
$T$	$e(T) (x10^{-4})$			
	$\Delta T$			
	$1 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-3}$	$2.5 \times 10^{-3}$	$1.25 \times 10^{-3}$
0.02	13.5	7.62	4.12	2.53
1.00	8.69	6.03	5.22	5.19
5.20	2.27	1.68	1.61	1.61
20.0	0.298	0.290	0.275	0.239

Para  $E=1$  começou-se com  $\Delta T=1 \times 10^{-2}$ , passando de seguida para metade deste valor e assim sucessivamente. Para um passo no tempo de  $1.25 \times 10^{-3}$ , verificou-se um erro muito pequeno (ver tabela II) pelo que se utilizou este valor ao longo do trabalho. Para as elasticidades 10 e 100 efectuou-se um raciocínio semelhante, contudo, com o aumento do número elástico, o passo no tempo a utilizar é

cada vez menor porque a frequência e amplitude da resposta aumentam. Desta forma, para capturar de forma precisa a resposta oscilatória, o passo no tempo usado foi de  $1.25 \times 10^{-4}$  para  $E=10$  e de  $2.5 \times 10^{-5}$  para  $E=100$  ao longo de todo o trabalho.

O erro de discretização parece ser essencialmente controlado pela discretização temporal uma vez que as alterações dos passos no tempo provocam uma maior deterioração na precisão dos resultados do que a variação do número de volumes de controlo da malha.

Analisa-se agora a figura 1 onde se apresenta a evolução temporal de  $U_0$  para  $E=1$  obtida através da solução analítica e comparada com a previsão numérica para  $\Delta T=1.25 \times 10^{-3}$ .

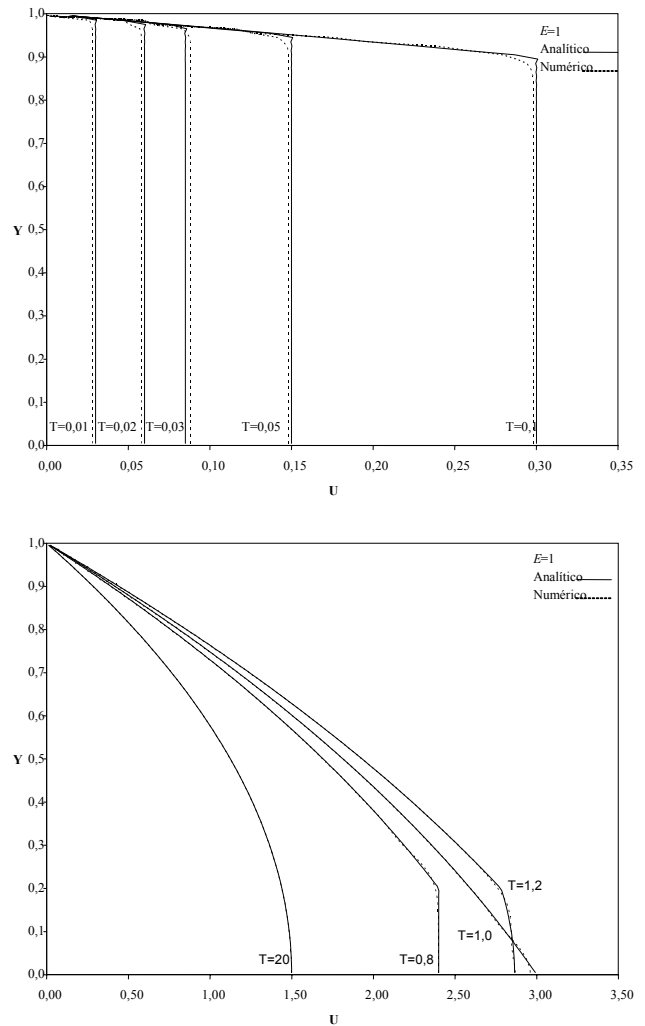


**Fig. 1.** Evolução da velocidade da linha central ( $Y=0$ ) ao longo do tempo para  $E=1$  ( $\Delta T=1.25 \times 10^{-3}$ ;  $\Delta y=0.01$ ) durante o *start-up* de um escoamento de *Poiseuille* para um fluido UCM com  $\beta=0.0$ . Apresenta-se ainda um gráfico local do primeiro pico.

Verifica-se que há uma boa concordância entre os resultados. A resposta oscilatória da velocidade face à aplicação instantânea de um gradiente de pressão é perfeitamente visível, existindo ainda pequenas oscilações de origem numérica perceptíveis através do zoom sobre dois picos na figura 1. A presença destas oscilações está relacionada com a precisão à qual a onda é capturada e com a ausência de difusão, ou seja, a velocidade responde instantaneamente à onda de corte. Como a frente da onda de corte é determinada pela posição das discontinuidades na derivada da velocidade em ordem ao tempo situadas nos picos das oscilações, ela torna-se dependente do tamanho da malha, e essa discontinuidade desloca-se ao longo de todo o domínio na direcção transversa, com a passagem do tempo. Assim, os resultados numéricos são bastante concordantes com as soluções analíticas excepto na vizinhança destes picos, onde se observam as pequenas oscilações.

Na figura 2 apresentam-se ainda alguns perfis da velocidade dependente do tempo entre a parede e a linha central, correspondentes a vários instantes no tempo, nomeadamente, logo a seguir ao *start-up* ( $T=0.01-0.1$ ), durante o primeiro pico ( $T=0.8-1.2$ ) e quando o escoamento se torna estacionário ( $T=20$ ). Como se pode observar, com o tamanho da malha usado, apesar de se obterem

respostas qualitativamente correctas, elas não são, porventura, suficientemente precisas para  $T$  pequenos.



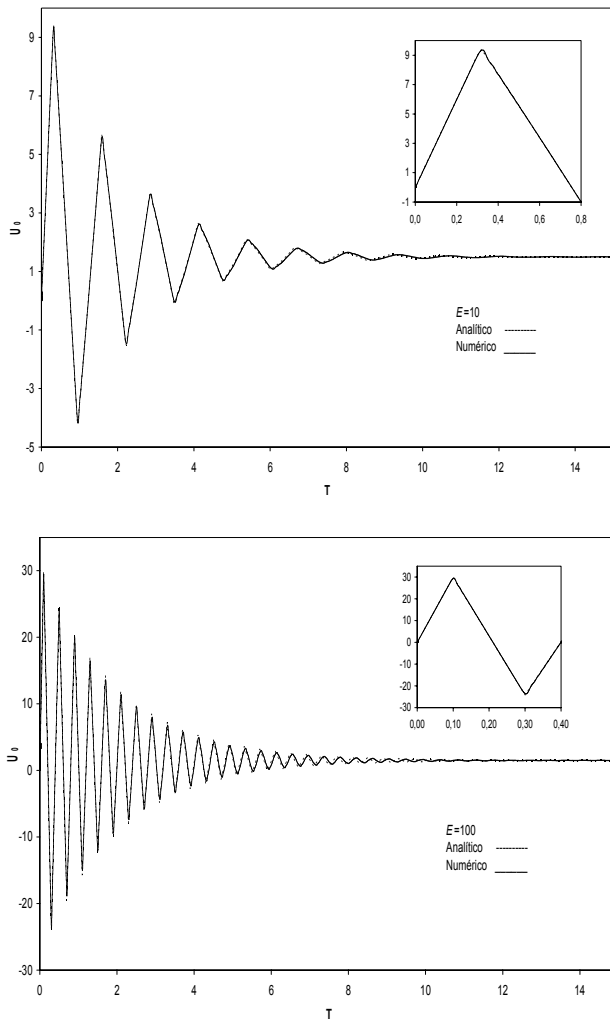
**Fig. 2.** Perfis de velocidade de  $E=1$  correspondentes a vários instantes no tempo ( $\Delta T=1.25 \times 10^{-3}$ ;  $\Delta y=0.01$ ).

O gradiente de velocidade nas soluções analíticas tem discontinuidades que correspondem a frentes de ondas de corte, i.e., uma onda de corte começa na parede em  $T=0$ , e propaga-se até à linha central, aí reflecte-se e propaga-se de novo para a parede. É este movimento da onda de corte que provoca o movimento oscilatório já evidenciado na figura 1.

Na figura 3 podem-se analisar as respostas da velocidade na linha central durante o *start-up flow* ( $0 < T < 15$ ) para um fluido UCM e números elásticos 10 e 100 tendo-se usado  $\Delta T=1.25 \times 10^{-4}$  e  $2.5 \times 10^{-5}$ , respectivamente.

Verifica-se que com o aumento do número elástico há também um aumento da frequência e amplitude oscilatórias no processo não-estacionário. Mais uma vez se pode verificar que a resposta analítica é reproduzida pela previsão numérica. Para melhor se identificarem as discrepâncias, o primeiro pico é alargado dentro das figuras. Verifica-se ainda que com a passagem do tempo, o erro na frequência torna-se cada vez maior e coloca-se em evidência uma resposta fictícia devido ao erro de fase.

Este erro pode ser diminuído se diminuirmos o passo no tempo utilizado.



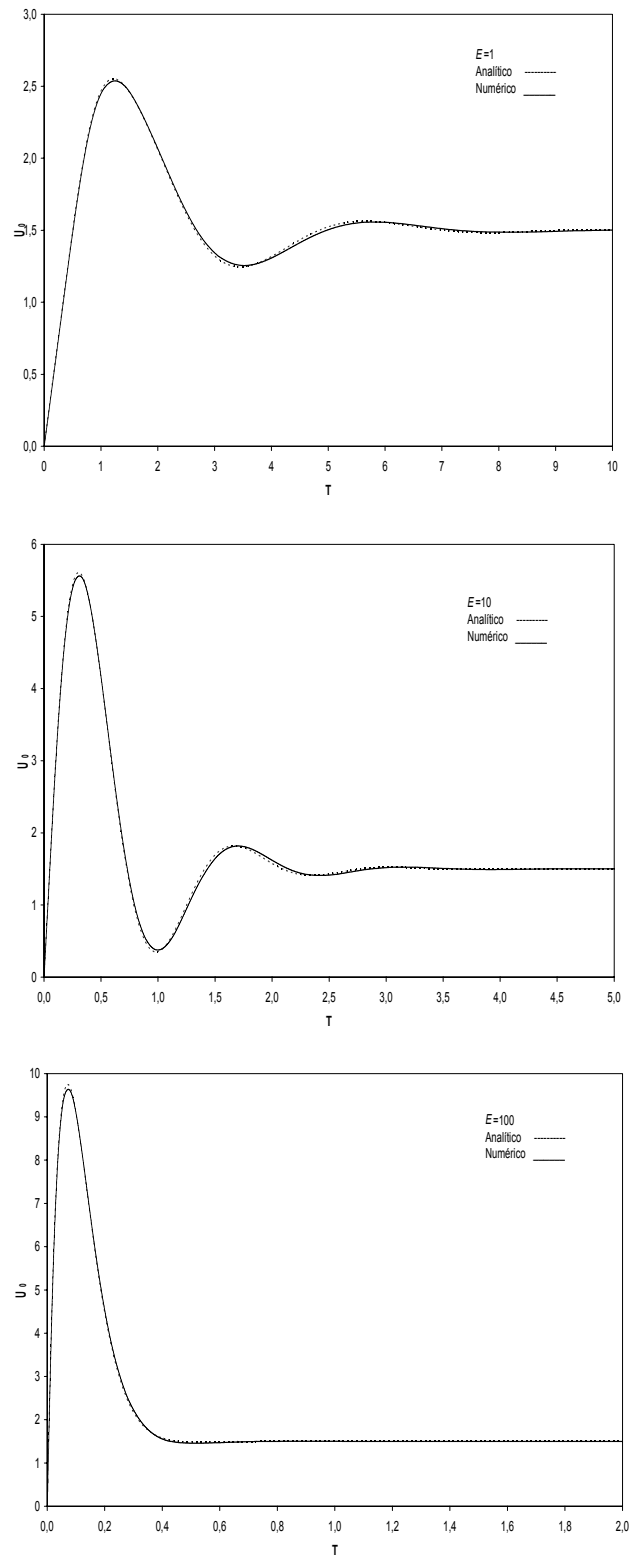
**Fig. 3.** Evolução da velocidade da linha central ( $Y=0$ ) ao longo do tempo para  $E=10$  e  $100$  ( $\Delta T=1.25 \times 10^{-4}$  e  $2.5 \times 10^{-5}$ , respectivamente;  $\Delta y=0.01$ ) durante o *start-up* de um escoamento de *Poiseuille* para um fluido UCM com  $\beta=0.0$ . Apresenta-se ainda um gráfico local do primeiro pico.

#### B. Análise para os fluidos Oldroyd-B e PTT

Na figura 4 apresentam-se as respostas analíticas obtidas durante o “escoamento de arranque” de um fluido Oldroyd-B e que são reproduzidas numericamente. Obtiveram-se resultados para as elasticidades 1, 10 e 100 e  $\beta=1/9$ .

Ao contrário do fluido UCM, a equação da quantidade de movimento de um fluido Oldroyd-B inclui um termo equivalente a uma viscosidade newtoniana. A velocidade de difusão é infinita e as oscilações de origem numérica, observadas nos gráficos locais apresentados nas figuras 1 e 3, não ocorrem.

Como se verifica, as soluções para fluidos viscoelásticos com viscosidade de solvente diferente de zero apresentam um movimento oscilatório reduzido e atenuação do pico devido à introdução de difusão física pela viscosidade do solvente.



**Fig. 4.** Evolução da velocidade da linha central ( $Y=0$ ) ao longo do tempo para  $E=1$ , 10 e 100 ( $\Delta T=1.25 \times 10^{-3}$ ,  $1.25 \times 10^{-4}$  e  $2.5 \times 10^{-5}$ , respectivamente;  $\Delta y=0.01$ ) durante o *start-up* de um escoamento de *Poiseuille* para um fluido Oldroyd-B ( $\beta=1/9$ ).

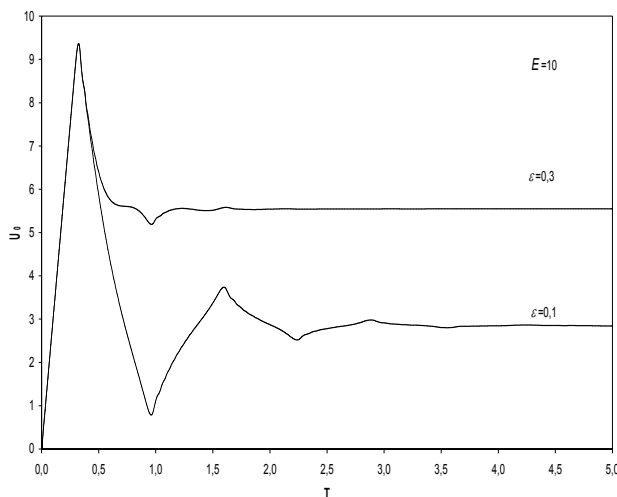
Devido a isso, a evolução não-estacionária e variação espacial do campo do escoamento ocorre suavemente.

São ainda investigados numericamente os escoamentos planos de *Poiseuille* para o *start-up* do fluido PTT e comparados com os resultados obtidos em A.

Como o fluido PTT aqui considerado é um fluido puramente elástico, espera-se encontrar um comportamento equivalente ao dos fluidos UCM, para a resposta da velocidade depois do arranque do escoamento e antes da frente da onda de corte chegar à linha central. A figura 5 apresenta a evolução não-estacionária da velocidade da linha central para um fluido PTT com parâmetros de extensibilidade  $\varepsilon=0.1$  e  $0.3$ .

De facto, usando este modelo, observa-se ainda um movimento oscilatório tal como no modelo UCM, contudo, devido ao efeito reofluidificante, os *over-* e *undershoots* são mais fracos e o estado estacionário é atingido mais rapidamente.

Assim que a frente da onda de corte atinge a linha central, obter-se-á um comportamento completamente diferente para a velocidade. O tempo e taxa com que a velocidade varia durante o *start-up* depende do valor de  $\varepsilon$ . Quanto maior for esse valor, mais o modelo PTT se afasta do modelo UCM e tal como se observa na figura, o movimento oscilatório torna-se menos preponderante.



**Fig. 5.** Evolução da velocidade da linha central ( $Y=0$ ) ao longo do tempo para  $E=10$  ( $\Delta T=1.25 \times 10^{-4}$ ;  $\Delta y=0.01$ ) durante o *start-up* de um escoamento de *Poiseuille* para um fluido PTT ( $\varepsilon=0.1$  e  $0.3$ ) com  $\beta=0.0$ .

### 3. Conclusões

Foi discutida a modelação numérica de escoamentos viscoelásticos dependentes do tempo no contexto do método dos volumes finitos.

Inicialmente, analisou-se o escoamento plano de *Poiseuille* para o arranque de um fluido UCM e avaliou-se o erro de discretização através do refinamento da malha e do uso de passos no tempo progressivamente menores.

Verificou-se que os resultados da simulação estão de acordo com as soluções analíticas e os erros de precisão foram minimizados através da escolha de um passo no tempo e refinamento da malha adequados.

Confirmou-se que o fluido UCM tem uma descontinuidade intrínseca do gradiente da velocidade na frente da onda de corte devido à qual os resultados numéricos apresentam umas pequenas oscilações localizadas. Contudo, os resultados obtidos são suficientemente exactos para prever a propagação da onda de corte com a variação do tempo.

Depois de se verificar que o método computacional originava resultados coerentes tentou-se resolver o problema utilizando outros modelos (Oldroyd-B e PTT) mais adequados. Concluiu-se que os fluidos completamente elásticos (UCM e PTT) apresentam o mesmo comportamento relativamente à velocidade, contudo, no modelo PTT, devido ao efeito reofluidificante na viscosidade, o estado estacionário é atingido mais depressa e a frequência da função de amortecimento é menor. O modelo Oldroyd-B, por incluir o termo viscoso newtoniano na equação da quantidade de movimento, faz com que a velocidade de difusão seja infinita e os *over-* e *undershoot* da velocidade, observados nos fluidos UCM e PTT estejam mascarados.

### Agradecimentos

Agradece-se o financiamento prestado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT), através do projecto de investigação POCTI/EME/48665/2002.

### Referências

- [1] R. Keunings, "Simulation of viscoelastic flow", in C.L. Tucker (Ed) *Computer Modelling for Polymer Processing 1989*, Hanser, Munich.
- [2] F.T.P. Baaijens, "Mixed finite element methods for viscoelastic flow analysis: a review", *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol.º79, pp. 361-385, 1998.
- [3] S.-C. Xue, R.I. Tanner, N. Phan-Thien, "Numerical modelling of transient viscoelastic flows", *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol.º123, pp. 33-58, 2004.
- [4] G. Mompean, M. Deville, "Unsteady finite volume simulation of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction", *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol.º72, pp. 253-279, 1997.
- [5] M.F. Webster, H.R. Tamaddon-Jahromi, M. Aboubacar, "Transient viscoelastic flows in planar contractions", *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol.º118, pp. 83-101, 2004.
- [6] T. Sato, S.M. Richardson, "Explicit numerical simulation of time-dependent viscoelastic flow problems by a finite element/finite volume method", *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol.º51, pp. 249-275, 1994.
- [7] P.J. Oliveira, Manual for the flow code *ONEPF*, Dep. de Engenharia Electromecânica, Universidade da Beira Interior, Covilhã (1995), pp. 1-27.
- [8] F.M. White, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, (1999).
- [9] N.D. Waters, M.J. King, "Unsteady flow of an elastico-viscous liquid", *Rheol. Acta*, Vol.º9, pp. 345-355, 1970.
- [10] R.B. Bird, C.F. Curtiss, R.C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids vol. 2 – Kinetic Theory*, 2ª ed. John Wiley & Sons, New York (1987b)