

Escoamento de fluido newtoniano através da junção de dois canais planos: Estudo numérico do efeito de inércia

Gerardo N. Rocha¹ e Paulo J. Oliveira¹


¹Universidade da Beira Interior, Departamento de Engenharia Electromecânica, Unidade de Materiais Têxteis e Papeleiros, Calçada Fonte do Lameiro, Edifício das Engenharias, 6201-001 Covilhã, Portugal
email: gerardorocha@portugalmail.pt e pjpo@ubi.pt <http://www.demnet.ubi.pt>

Sumário

Neste trabalho analisa-se por meio de simulações computacionais o comportamento do escoamento newtoniano através da junção de dois canais planos quando se faz variar o número de Reynolds. O escoamento assume-se como bidimensional e a sua simulação requer a resolução das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento, sendo ainda necessário considerar uma equação constitutiva, que no caso presente se reduz à usual lei de Newton da viscosidade. Conclui-se que para valores de Re elevados ($Re > 1500$) o escoamento bifurca para uma solução assimétrica, com o comprimento da recirculação a tornar-se maior num dos lados da parede do canal de saída comparativamente à parede oposta. Esta instabilidade mostra semelhanças com a que ocorre numa expansão plana.

Palavras-chave: Fluido newtoniano; Escoamento assimétrico; Simulação numérica; Efeito inercial; Método dos volumes finitos.

1 Introdução

Pretende-se com este trabalho analisar o comportamento do escoamento newtoniano através da junção de dois canais planos numa geometria em forma de cruz () quando se faz variar o número de Reynolds. O escoamento é bidimensional, com o fluido a entrar pelos canais da esquerda e da direita e a sair pelos canais de cima e de baixo, conforme a representação esquemática da Fig. 1. Este estudo dá seguimento aos trabalhos publicados por Arratia *et al.* [1], Poole *et al.* [2] e Rocha *et al.* [3] onde se consideraram escoamentos com velocidades muito baixas (*creeping-flow*) e viscoelásticos, desprezando-se assim o efeito da inércia do fluido (número de Reynolds, Re). O principal interesse foi então o de analisar a influência da elasticidade do fluido de forma a verificar se o escoamento conduzia a uma bifurcação, o que se verificou. Neste trabalho, iremos apenas focar atenção ao comportamento do escoamento através do cruzamento de canais quando se aumenta progressivamente a inércia do escoamento (ou seja, os resultados serão função apenas do número de Reynolds). O escoamento é regido pelas equações de conservação da massa e da quantidade de movimento, juntamente com uma equação constitutiva que no caso presente se reduz à lei de Newton da viscosidade. Para a discretização das equações de governo será usado o método dos volumes finitos [4-5], com a discretização baseada num esquema de alta-resolução (CUBISTA [8]) e utilizando uma malha ortogonal estruturada. Os resultados numéricos revelam que a partir de um certo valor de Reynolds surge uma recirculação do escoamento após o cruzamento dos canais em direcção à saída, de acordo com os resultados da Fig. 5. Para valores de Re mais elevados (entre $Re = 1400$ e 1500) o escoamento bifurca para uma solução assimétrica, com o comprimento de recirculação maior num dos lados do canal de saída, comparativamente ao outro.

Este trabalho será organizado da seguinte forma: na Secção 2 apresentam-se as equações que regem o escoamento e descreve-se, de forma sucinta, o método numérico utilizado para a discretização das equações; na Secção 3 faz-se uma descrição do problema; na Secção 4 apresentam-se e discutem-se os resultados numéricos obtidos e por fim na Secção 5 apontam-se as principais conclusões.

2 Equações fundamentais e método numérico

O fluido é considerado como newtoniano e incompressível, com massa específica ρ constante. O escoamento é isotérmico e faz-se em regime laminar e estacionário. As equações diferenciais que regem o escoamento são as habituais equações de conservação da massa

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

e da quantidade de movimento,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2)$$

juntamente com a aplicação da equação constitutiva para o fluido newtoniano (lei de Newton da viscosidade)

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (3)$$

onde \mathbf{u} é o vector velocidade, p a pressão, μ a viscosidade (constante) e $\boldsymbol{\tau}$ o tensor das tensões.

A resolução do problema requer ainda condições de fronteira que são apresentadas na Secção 3. As equações diferenciais (1)-(3) são transformadas em equações algébricas por meio do método dos volumes-finitos, sendo resolvidas segundo uma metodologia já utilizada em trabalhos anteriores; para maiores detalhes consultar Oliveira *et al.* [4]. As equações são discretizadas por integração em volumes de controlo que compõem a malha computacional (ver Fig. 3). Todas as variáveis são calculadas no centro dos volumes de controlo e a malha computacional é ortogonal. O acoplamento do campo de pressão com a velocidade é feito através de um processo de correcções sucessivas da pressão e das velocidades, de forma a se verificar a conservação de massa [5]. O algoritmo utilizado é uma forma particular do algoritmo SIMPLEC [6] desenvolvido por Issa e Oliveira [7]. Além disso, foi usado o esquema de alta-resolução CUBISTA (terceira ordem) [8] para a discretização dos termos convectivos, enquanto que os termos difusivos e de gradiente de pressão foram representados por esquemas de diferenças centrais (segunda ordem).

3 Descrição do problema

Na Figura 1 é apresentada esquematicamente a geometria do escoamento bidimensional com a indicação de algumas quantidades relevantes. O domínio de cálculo corresponde a um cruzamento de canais planos (*cross-slot*) com o fluido a entrar pelos canais da esquerda e da direita e a sair pelos canais de cima e de baixo. O interesse deste trabalho prende-se com a análise do comportamento do escoamento nos canais de saída após o aparecimento de zonas de recirculação que se mantêm colados às paredes, logo a jusante dos 4 cantos que compõem a geometria em cruz. Os canais de entrada e saída do escoamento têm larguras unitárias (d) e comprimentos $10d$, conforme representado na Fig. 1.

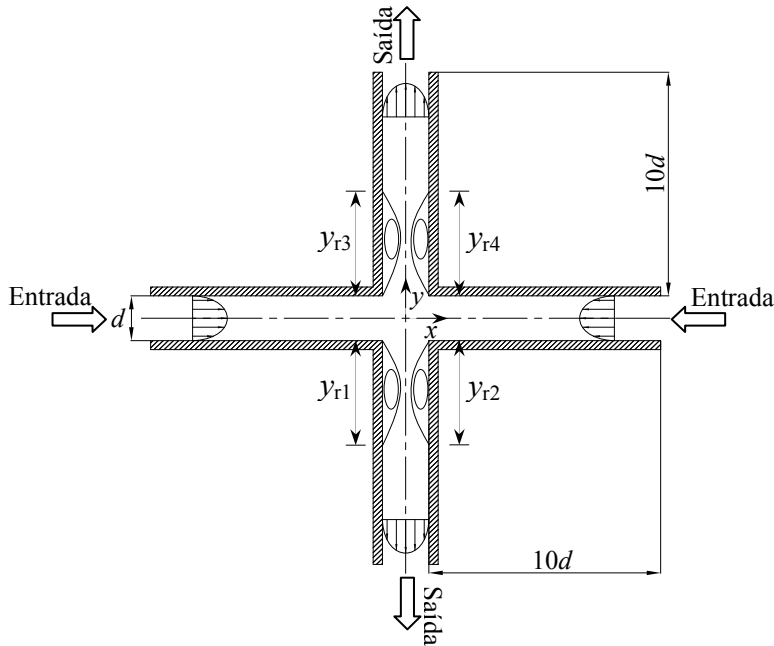


Fig.1. Representação esquemática do escoamento com a indicação de algumas quantidades relevantes.

3.1 Condições de fronteira

Estas são necessárias para particularizar ao problema em causa a solução das equações diferenciais gerais apresentadas na Secção 2. No problema em análise existem 2 planos de entrada do escoamento, 2 planos de saída, e paredes sólidas.

Entrada:

Impondo condições de escoamento estacionário e completamente desenvolvido na entrada dos canais resulta numa única componente não nula da velocidade $u(y)$, que é solução da equação diferencial:

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du}{dy} \right) \quad (4)$$

Considerando que o escoamento se processa num canal plano com linha central ao longo do eixo dos x e paredes situadas em $y = \pm d/2$, conforme o caso em estudo, as condições de fronteira são então dadas por:

$$y = 0 \Rightarrow \frac{du}{dy} = 0 \text{ e } y = \pm \frac{d}{2} \Rightarrow u = 0 \quad (5)$$

resultando na conhecida solução analítica (correspondente ao perfil de velocidades parabólico):

$$u_{teo}(y) = 1.5U \left(1 - \left(\frac{y}{d/2} \right)^2 \right) \quad (6)$$

A velocidade média U na secção transversal do canal é determinada pela integração do perfil de velocidades através da semi-altura $d/2$:

$$U = \frac{1}{d/2} \int_0^{d/2} u(y) dy \quad (7)$$

implicando que U e o gradiente de pressões $(-dp/dx)$ podem ser relacionados pela seguinte expressão:

$$U = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{d^2}{12\mu} \quad (8)$$

Uma vez que o fluido é incompressível o valor absoluto da pressão é irrelevante, interessando apenas a sua variação ao longo do domínio de cálculo. Numa das entradas considerou-se que a pressão é igual a zero e o campo de pressão é então corrigido em cada iteração de forma a ser garantido a condição de conservação da massa.

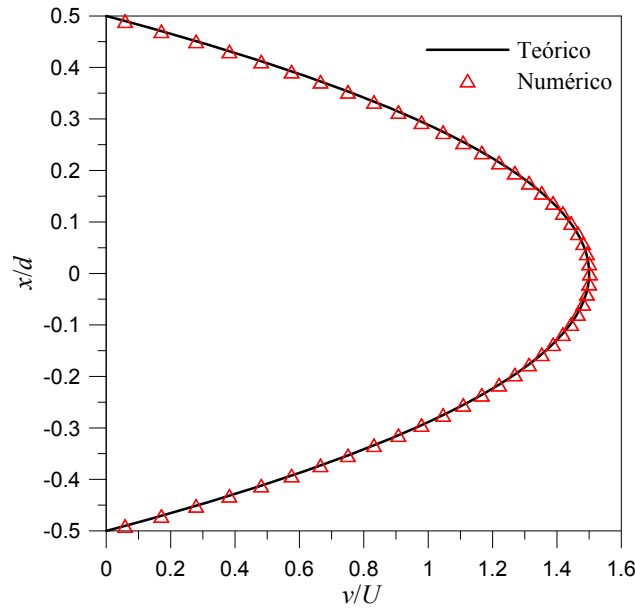


Fig.2. Comparação entre o perfil de velocidades teórico (linha) e numérico (símbolos) na saída dos canais ($Re = 200$).

Saída:

Na saída dos canais aplica-se gradiente axial de velocidade nulo (condições de Neumann: $\partial v / \partial y = 0$) e garante-se que metade do caudal total de entrada sai pelo canal de cima e a outra metade pelo canal de baixo.

Na Fig. 2 faz-se a comparação do perfil de velocidades teórico (proveniente da Eq. (6)) e numérico na saída dos canais, e pode-se verificar que existe uma boa concordância entre os resultados.

Parede:

As restantes condições de fronteira dizem respeito às paredes dos canais de entrada e saída onde foram impostas as condições de não escorregamento (com $u = v = 0$).

Na Figura 3(a) apresenta-se a malha computacional que foi gerada por divisão do domínio em cinco blocos (conforme a Fig. 3(b)), cujas principais características geométricas estão apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1. Características geométricas da malha computacional.

Blocos	N_x	N_y	f_x	f_y
I	50	51	0.929	1.000
II	51	51	1.000	1.000
III	51	50	1.000	0.929
IV	51	50	1.000	1.075
V	51	50	1.075	1.000
NVC = 12801				

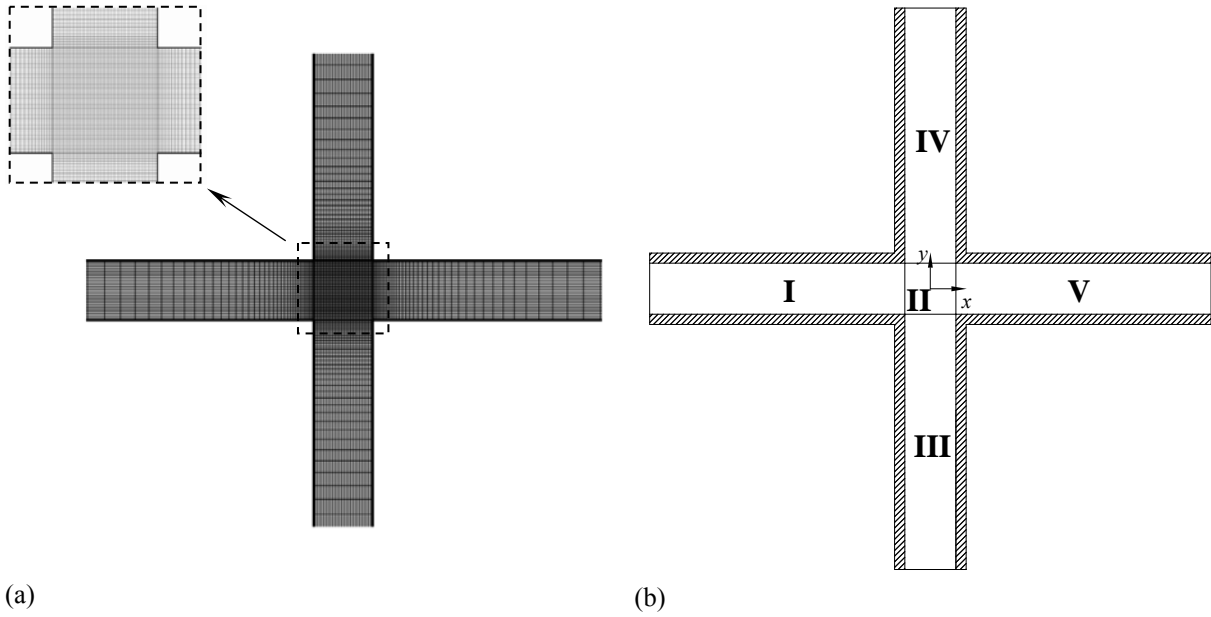


Fig.3. Representação esquemática: (a) Detalhe da malha computacional ($-4 \leq x/d; y/d \leq 4$), (b) Domínio de cálculo dividido em blocos.

Esta malha computacional tem as mesmas características que as malhas utilizadas nos trabalhos de Poole *et al.* [2] e Rocha *et al.* [3]. Na Tabela 1 apresenta-se o número de células utilizado para definir cada bloco da geometria ao longo das direcções x (N_x) e y (N_y). Esta malha computacional tem 12801 volumes de controlo. Os valores de f_x e f_y representam os factores de expansão ou compressão do espaçamento das células ao longo das direcções x e y .

Antes de se passar à apresentação dos resultados obtidos faz-se uma análise sucinta do efeito do refinamento de malha usando uma malha com o dobro do número de volumes de controlo ao longo de cada uma das direcções, o que implica cerca de quatro vezes mais volumes de controlo totais (malha M2, 50601 volumes de controlo). Na Figura 4 apresentam-se os perfis de velocidade ao longo da linha central ($y = 0$) para as duas malhas M1 e M2, sendo o número de Reynolds $Re = 1400$. Pode-se constatar que existe uma boa concordância entre os resultados obtidos em ambas as malhas, justificando assim o uso da malha menos refinada (M1) para todos os cálculos numéricos posteriores. A estimativa da incerteza numérica nesta malha M1 é de 3.4%.

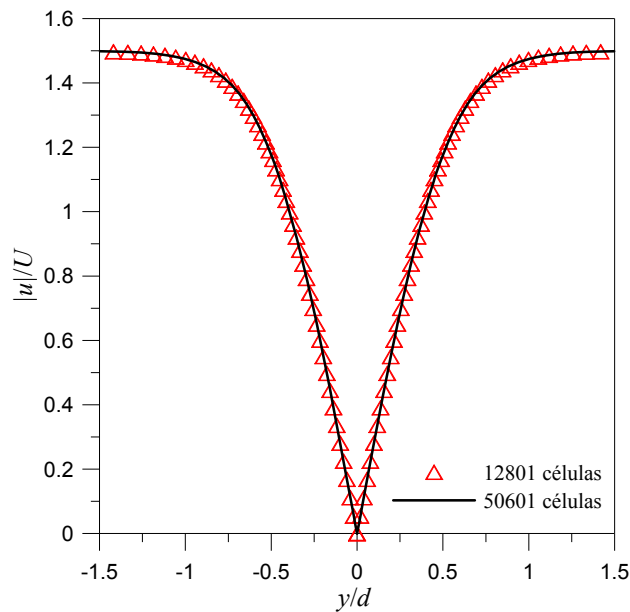


Fig.4. Comparação dos perfis de velocidade ao longo da linha central horizontal ($y = 0$) para a malha M1 (12801 células) e M2 (50601 células), com $Re = 1400$.

4 Resultados

Para a análise do comportamento do escoamento inercial de um fluido newtoniano através da geometria em cruz foram efectuadas várias corridas computacionais em regime estacionário. Como se está na presença de um fluido newtoniano o único parâmetro adimensional relevante é o número de Reynolds definido por $Re = \rho U d / \mu$, sendo U a velocidade média nos canais de entrada (Eq. (7)) e d a respectiva altura (ver Fig. 1). Este parâmetro define a razão entre as forças inerciais e viscosas do fluido. Para variar o número de Reynolds nas simulações, uma vez que o termo que representa as forças inerciais ($\rho U d$) se mantém constante e igual a 1 (sendo $\rho = 1$, $U = 1$ e $d = 1$), apenas variamos directamente as forças viscosas (μ) do fluido. Alguns dos resultados obtidos para o comprimento dos vórtices que aparecem nos canais de saída estão apresentados na Tabela 2, com $Y_{r1} = y_{r1}/d$ (parede esquerda do canal de saída inferior), $Y_{r2} = y_{r2}/d$ (parede direita do canal de saída inferior), $Y_{r3} = y_{r3}/d$ (parede esquerda do canal de saída superior) e $Y_{r4} = y_{r4}/d$ (parede direita do canal de saída superior), tal como apresentado na Fig.1. De forma arbitrária consideram-se negativos os comprimentos de recirculação dos vórtices no canal inferior (y_{r1} e y_{r2}). Para $Re = 1500$ o escoamento já é assimétrico enquanto que, para $Re = 1480$, ainda se mantém simétrico.

Tabela 2. Comprimentos de recirculação ($1400 \leq Re \leq 1600$).

Re	Y_{r1}	Y_{r2}	Y_{r3}	Y_{r4}
1400	-2.745	-2.745	2.745	2.745
1480	-2.902	-2.902	2.902	2.902
1500	-2.926	-2.979	2.926	2.979
1520	-2.853	-3.127	2.853	3.127
1540	-2.676	-3.357	2.676	3.357
1560	-2.485	-3.578	2.485	3.578
1580	-2.339	-3.756	2.339	3.756
1600	-2.239	-3.899	2.239	3.899

Na Figura 5 apresenta-se a evolução dos comprimentos de recirculação que ocorrem nas paredes do canal de saída superior (Y_{r3} e Y_{r4}) com o aumento da inércia; um comportamento idêntico verifica-se no canal de saída inferior ($Y_{r3} = Y_{r1}$ e $Y_{r4} = Y_{r2}$), uma vez que os resultados mostram haver simetria em torno do plano vertical y (isto é, $x = 0$).

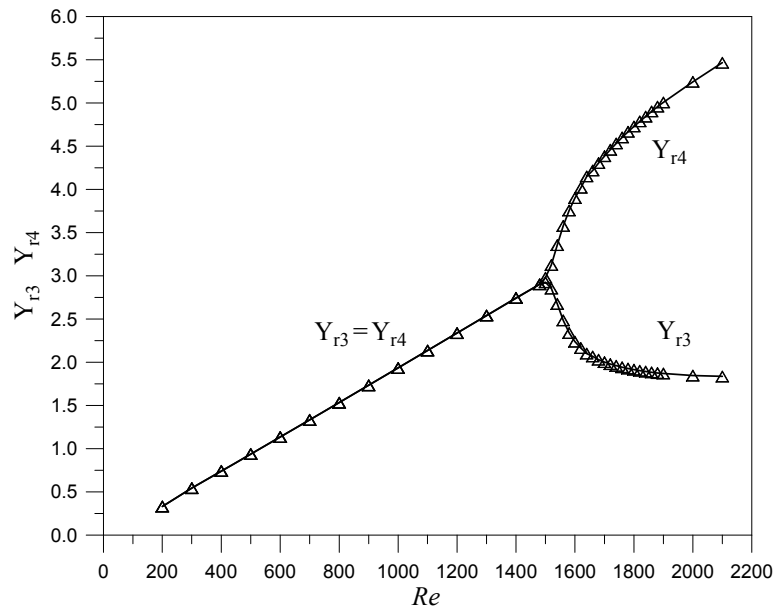


Fig.5. Efeito da inércia (Re) sobre os comprimentos dos dois vórtices no canal de saída superior.

Os resultados obtidos revelam que o comprimento de recirculação cresce de forma linear à medida que o número de Reynolds aumenta, até que atinge um limite a partir do qual o escoamento se torna assimétrico apresentando um comprimento de recirculação maior numa das paredes relativamente à outra parede oposta (ver Fig. 8, por exemplo para $Re = 1700$). O ponto de transição em que ocorre a bifurcação (de simétrico para assimétrico) é definido pelo número de Reynolds crítico (Re_{cr}), sendo aproximadamente igual a 1500 (os resultados da Tabela 2 fornecem $Re_{cr} = 1490 \pm 10$).

Neste estudo define-se ainda um parâmetro adimensional $DY = -(Y_{r2} - Y_{r1}) / (1/2(Y_{r2} + Y_{r1})) = (Y_{r4} - Y_{r3}) / (1/2(Y_{r4} + Y_{r3}))$ para quantificar o grau de bifurcação do escoamento. Desta forma, no caso do escoamento ser simétrico, tem-se $Y_{r1} = Y_{r2} = Y_{r3} = Y_{r4}$ e $DY = 0$, enquanto que para o caso em que há bifurcação $Y_{r1} = Y_{r3}$ e $Y_{r2} = Y_{r4}$, com $DY \neq 0$ e $DY = \pm 1$ (no limite – completamente assimétrico), conforme os resultados apresentados na Fig. 6. Esta figura mostra um diagrama de bifurcação típico, correspondente a uma instabilidade estacionária supercrítica, com 3 soluções possíveis, uma das quais (esc. simétrico) é instável e não ocorre na prática.

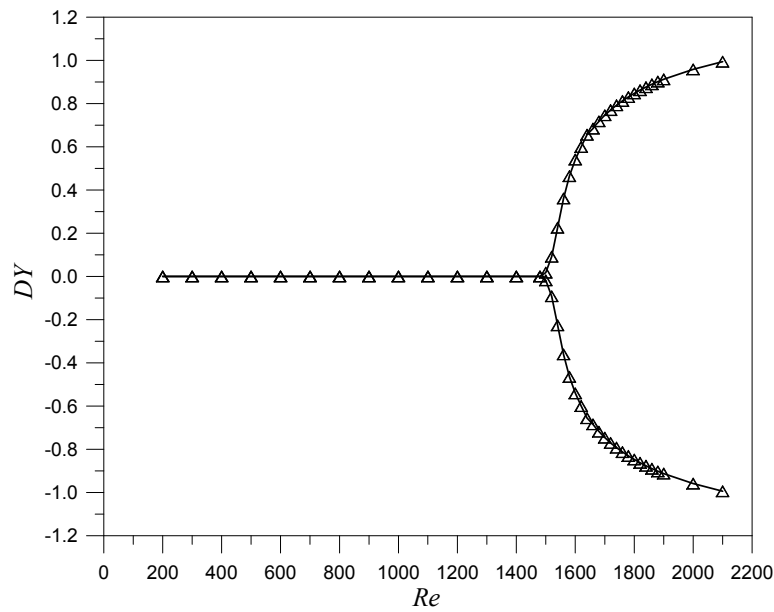


Fig.6. Diagrama de bifurcação: DY em função do número de Reynolds.

Como foi referido anteriormente, o comprimento das recirculações que ocorrem nas paredes dos canais de saída aumentam linearmente com o aumento do número de Reynolds (ver a evolução das linhas de corrente na Fig. 7), sendo bem correlacionado pela seguinte expressão:

$$Y_r = -0.0697 + 0.002Re \quad (9)$$

válida para $200 \leq Re \leq Re_{cr} \approx 1500$.

Quando se atinge o ponto a partir do qual esses comprimentos são diferentes (aparecimento da bifurcação para escoamento assimétrico, para $Re_{cr} \approx 1500$, com $DY \neq 0$) o aumento de Y_r deixa ser linear com Re .

Na Figura 7 apresentam-se as linhas de corrente resultantes das simulações numéricas quando se faz variar o número de Reynolds entre 200 e 1000. As linhas de corrente apenas estão representadas na parede esquerda do canal de saída inferior uma vez que o tamanho da bolha de recirculação é igual para as restantes paredes dos canais de saída, pois nesta fase o escoamento ainda é simétrico.

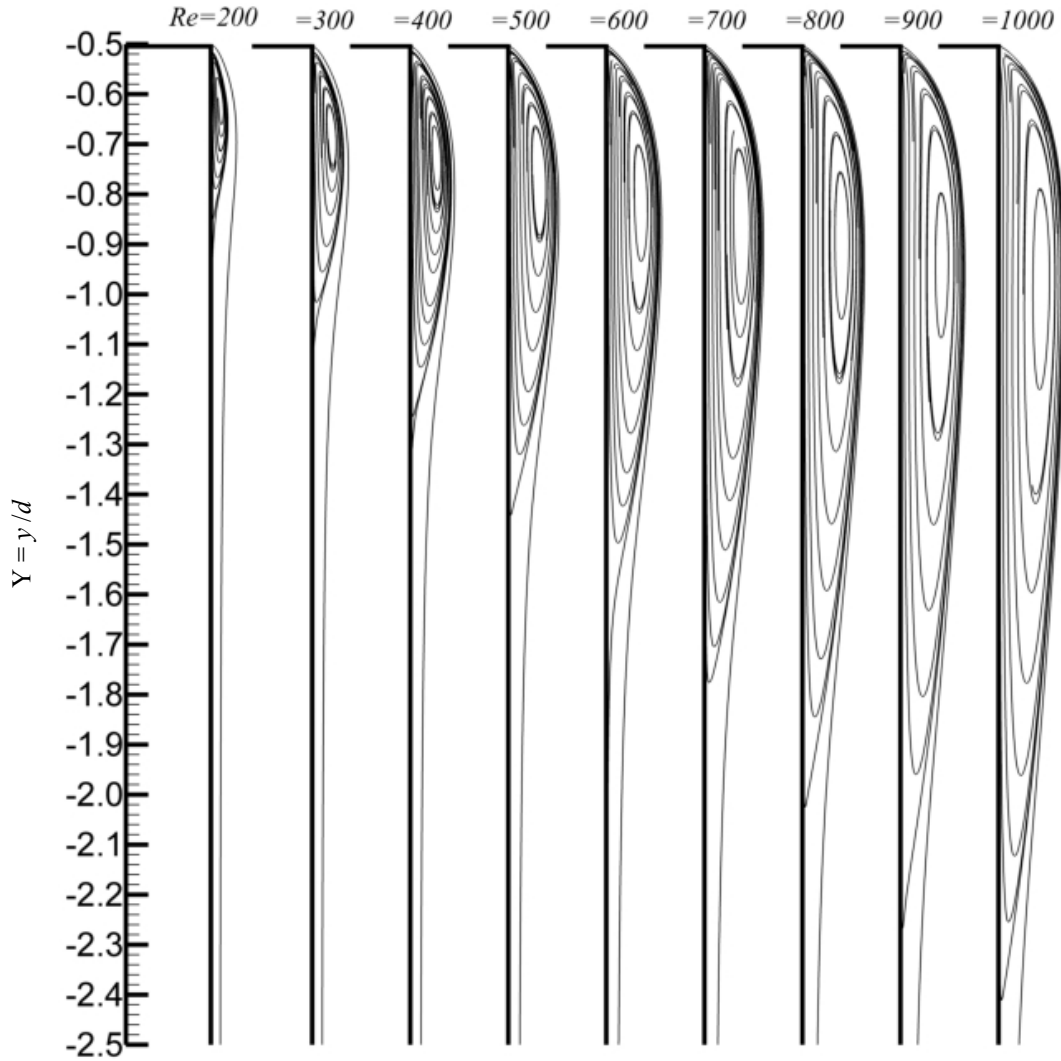


Fig.7. Detalhe da bolha de recirculação formada sobre uma das paredes do canal de saída inferior, para valores crescentes do número de Reynolds (escoamento simétrico).

Na Figura 8 apresentam-se as linhas de corrente após a bifurcação para escoamento assimétrico ($Re_{cr} \approx 1500$), com valores de Re entre 1500 e 2000. Os comprimentos de recirculação são idênticos no canal de saída superior pelo que apenas se apresenta a sua variação no canal de saída inferior. Nas condições das presentes simulações, a maior recirculação ocorre na parede direita dos canais de saída superior e inferior ($Y_{r2} = Y_{r4}$), enquanto que a menor recirculação dá-se na parede esquerda ($Y_{r1} = Y_{r3}$). Esta situação pode inverte-se, com a maior bolha de separação na parede da esquerda, dependendo das condições iniciais e dos parâmetros numéricos (passo no tempo utilizado, por exemplo). Os resultados mostram haver uma simetria relativamente ao plano y ($x = 0$), o que contrasta com a correspondente bifurcação puramente elástica (refs. [1]-[3]), com $Re = 0$, em que existe uma anti-simetria: as recirculações maior e menor formavam-se no mesmo lado da parede dos canais de saída. Constata-se ainda desta figura e da Fig. 5 que, a partir da bifurcação assimétrica, a recirculação mais pequena tende a estabilizar enquanto que a recirculação maior continua a aumentar com Re .

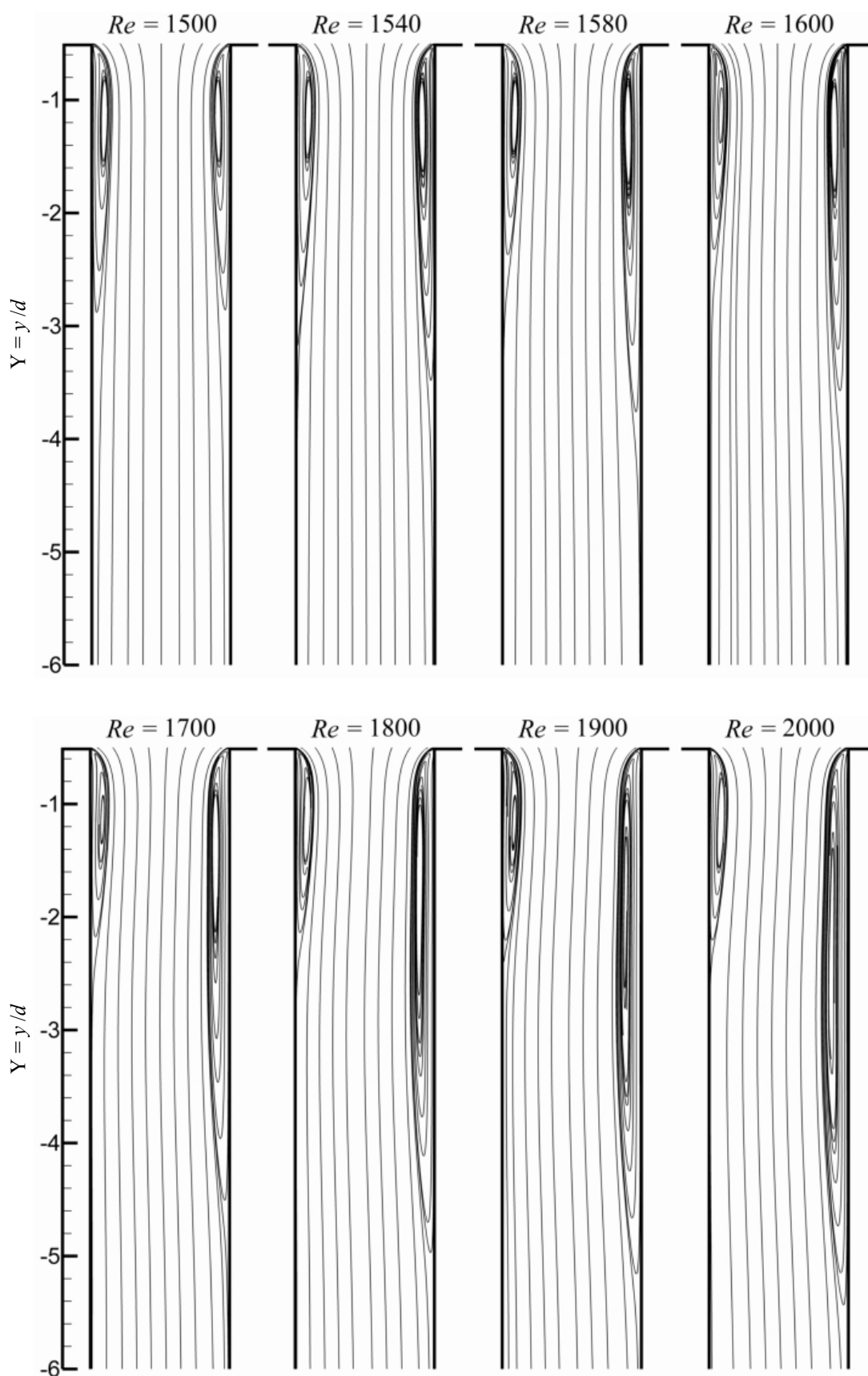


Fig.8. Linhas de corrente e recirculação do escoamento no canal de saída inferior em função do número de Reynolds para situação pós-crítica ($Re_{cr} \approx 1500$).

5 Conclusões

Neste trabalho simulou-se o escoamento newtoniano através de um cruzamento de canais para valores crescentes da inércia, medida pelo número de Reynolds. Pode concluir-se que a inércia provoca o aparecimento de recirculação nas paredes dos canais de saída cujo tamanho aumenta de forma linear com o aumento do número de Reynolds. O escoamento mantém-se simétrico até ao ponto crítico $Re_{cr} \approx 1500$ em que surge uma bifurcação em garfo (*pitch fork*) resultando em recirculações desiguais. Após a bifurcação ocorre uma recirculação maior num dos lados da parede em relação à parede oposta; a recirculação mais pequena tende a manter-se constante com o aumento do número de Reynolds, ao passo que a recirculação maior continua a aumentar de comprimento. A *simetria* do escoamento após a bifurcação é diferente da que ocorre com fluidos viscoelásticos para números de Reynolds muito baixos. O fenómeno aqui descrito é semelhante ao que acontece em expansões planas com fluidos newtonianos [9] e não newtonianos viscoelásticos [10].

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro prestado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), através da bolsa de doutoramento SFRH/BD/22644/2005 (G.N. Rocha) e do projecto PTDC/EME-MFE/70186/2006. P.J. Oliveira agradece ainda a concessão da licença sabática pela Universidade da Beira Interior.

Referências

1. P.E. Arratia, C.C. Thomas, J. Diorio e J.P. Gollub, Elastic instability of polymer solutions in cross-channel flow, *Phys. Rev. Lett.*, 96, 144502, 2006.
2. R.J. Poole, M.A. Alves e P.J. Oliveira, Purely elastic flow asymmetries, *Phys. Rev. Lett.*, 99, 164503, 2007.
3. G.N. Rocha, R.J. Poole, M.A. Alves e P.J. Oliveira, On extensibility effects in the cross-slot flow bifurcation, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 156, 58-69, 2009.
4. P.J. Oliveira, F.T. Pinho e G.A. Pinto, Numerical simulation of non-linear elastic flows with a general collocated finite-volume method, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 79, 1-43, 1998.
5. S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington DC, 1980.
6. J.P. Van Doormaal e G. D. Raithby, Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows, *Numerical Heat Transfer*, Part A: Applications, 7, 147-163, 1984.
7. R.I. Issa e P.J. Oliveira, Numerical prediction of phase separation in two-phase flow through T-junctions, *Computers & Fluids*, 23, 347-372, 1994.
8. M.A. Alves, P.J. Oliveira e F.T. Pinho, A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection, *Int. J. Numer. Mech. Fluids*, 41, 47-75, 2003.
9. F. Durst, J.C.F. Pereira e C. Tropea, The plane symmetric sudden-expansion flow at low Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, 248, 567-581, 1993.
10. P.J. Oliveira, Asymmetric flows of viscoelastic fluids in symmetric planar expansion geometries, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 114, 33-63, 2003.