

STARTUP TIMES IN VISCOELASTIC CHANNEL FLOW

Amílcar I.P. Miranda¹ e Paulo J. Oliveira^{2*}

1: Departamento de Matemática
Universidade da Beira Interior
6201-001 Covilhã, Portugal
e-mail: amiranda@mat.ubi.pt web: <http://www.ubi.pt>

2: Departamento de Engenharia Electromecânica
Unidade de Materiais Têxteis e Papeleiros
Universidade da Beira Interior
6201-001 Covilhã, Portugal
e-mail: pjpo@ubi.pt web: <http://webx.ubi.pt/~pjpo/>

Palavras-chave: Tempo de arranque, Start-up time, Fluido Viscoelástico, Canal Plano

Resumo. *O tempo de arranque de escoamento viscoelástico num canal plano, após imposição súbita de um gradiente de pressões, foi calculado por um método analítico/numérico. Os modelos reológicos utilizados foram o convectivo-superior de Maxwell (UCM) e o Oldroyd-B. Com estes modelos, o escoamento tende assintoticamente para a solução de estado estacionário após um regime transitório com oscilações acentuadas do campo de velocidades, o que implica um procedimento especial para o cálculo do tempo de arranque. Este tende a aumentar significativamente com a elasticidade, de forma linear para o UCM, e com taxa de crescimento inferior a linear para o Oldroyd-B. Não foram obtidas oscilações espúrias na variação do tempo de arranque com o número de elasticidade.*

1. INTRODUÇÃO

Um escoamento de arranque ocorre quando um gradiente de pressão constante é aplicado subitamente a uma porção de líquido que está inicialmente em repouso. A solução analítica deste problema para um líquido newtoniano foi obtida em 1930 por Bromwich [1] mostrando que a velocidade aumenta com o tempo de forma monótona até que um perfil parabólico de velocidades é atingido assintoticamente, para tempos elevados. Se o tempo de arranque (startup time) for definido como o instante em que a velocidade atinge 1% da velocidade em

estado estacionário então tem-se $t_s = 1.88\rho h^2 / \mu$, onde h é a meia-largura do canal, e ρ e μ são a massa volúmica e a viscosidade do fluido. Sob forma adimensional, quando o tempo é definido relativamente a uma escala de tempo difusiva, fica $t_s = 1.88$.

Para um líquido viscoelástico que obedeça às equações constitutivas da derivada convectiva superior de Maxwell (modelo UCM) ou de Oldroyd (modelo Oldroyd-B [2]) os resultados são mais complicados embora a solução para tempos elevados, em regime permanente, seja igual à solução newtoniana, com um perfil de velocidades de forma parabólica. A solução transitória é conhecida tendo sido obtida por Waters e King [3]. Neste trabalho pretende-se, utilizando um método misto analítico/ numérico, obter a evolução do tempo de arranque do escoamento em função do número de elasticidade do fluido e da razão entre tempos de retardamento e de relaxação. Devido à natureza essencialmente oscilante destes escoamentos, a definição e cálculo deste tempo de arranque reveste-se de maior complexidade do que no caso newtoniano, de forma a filtrar as oscilações próprias do escoamento. Para o modelo UCM os tempos de arranque obtidos desta forma especial mostram uma tendência inicial para diminuir com o aumento do número de elasticidade, seguido dum aumento quase linear quando E é superior a cerca de 0.5 ($t_s \sim 11.8E$). Por outro lado, para o modelo de Oldroyd-B a taxa de aumento do tempo de arranque é inferior à unidade; por exemplo, para uma razão de retardamento igual a $\beta = 0.1$ encontrou-se $t_s \sim E^{0.8}$.

O escoamento de arranque de fluidos viscoelásticos [4] num canal plano assume particular importância na validação de métodos numéricos de cálculo de escoamentos transientes com este tipo de fluidos, uma vez que existe solução analítica para este problema, quando se consideram os modelos UCM e Oldroyd-B para o fluido. A solução transitória evolui no tempo para o regime estacionário característico do escoamento de um fluido newtoniano. O tempo que o regime variável demora a atingir condições próximas do regime estacionário, depende fortemente da elasticidade do fluido. Neste trabalho fez-se um estudo da dependência deste tempo com a elasticidade do fluido, envolvendo os modelos referidos. A geometria do canal plano é apresentada na Figura 1.

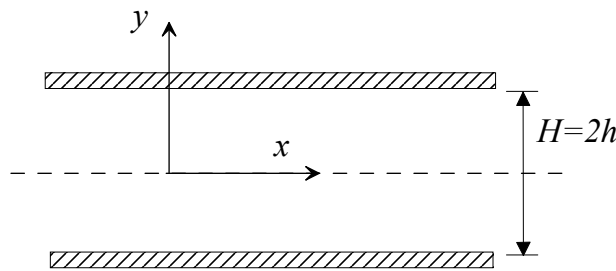


Figura 1. Esquema da geometria para canal plano.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

As equações que conduzem à solução analítica envolvem a conservação da massa, a conservação da quantidade de movimento e uma relação constitutiva para o fluido [2], [4]. A resolução das equações assume as condições de escoamento completamente desenvolvido e as condições de fronteira de não escorregamento.

A conservação da massa traduz-se na seguinte equação:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

onde \mathbf{u} representa o vector velocidade de componentes cartesianas u e v relativamente às variáveis espaciais x e y .

Nas condições de escoamento completamente desenvolvido vem $\partial u / \partial x = 0$ que, juntamente com a condição de fronteira de não escorregamento que impõe velocidade nula nas paredes, permite concluir, através da Eq.(1), que $v=0$.

A conservação da quantidade de movimento tem por equação

$$\rho \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{tot} \quad (2)$$

onde ρ representa a massa volúmica do fluido, p a pressão e $\boldsymbol{\tau}_{tot}$ o tensor das tensões totais, newtonianas e viscoelásticas. Para as condições de escoamento completamente desenvolvido e separando o tensor das tensões totais na soma da parcela newtoniana com a parcela viscoelástica, a Eq. (2) vem,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial (\tau_{xy})_{tot}}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \eta_s \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (3)$$

sendo η_s a viscosidade do solvente, correspondente à contribuição newtoniana e τ_{xy} a componente do tensor das tensões viscoelásticas.

O tensor das tensões viscoelásticas obedece à seguinte equação constitutiva [4]:

$$\lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} + f\boldsymbol{\tau} = 2f'\eta_p \mathbf{D} \quad (4)$$

onde λ é o tempo de relaxação do fluido, f e f' são funções dos invariantes de $\boldsymbol{\tau}$ adequadas a cada modelo, η_p é a contribuição do polímero para a viscosidade a taxa de deformação nula,

\mathbf{D} é o tensor de deformação e $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$ a derivada temporal convectiva superior [2] do tensor das tensões definida como

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (5)$$

O tempo de relaxação dá uma indicação da magnitude da natureza elástica do fluido. À medida que o tempo de relaxação aumenta também aumenta a elasticidade do fluido e o valor nulo corresponde ao fluido newtoniano. As viscosidades do solvente e do polímero η_s e η_p estão relacionadas do seguinte modo

$$\eta_0 = \eta_s + \eta_p, \quad \beta = \frac{\eta_s}{\eta_0} = \frac{\lambda_r}{\lambda} \quad (6)$$

onde η_0 é a viscosidade total à taxa de deformação nula e λ_r o tempo de retardamento do fluido.

Para os modelos UCM e Oldroyd-B tem-se $f = f' = 1$. No modelo UCM vem $\eta_s = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$, o que se traduz pela inexistência de termo difusivo explícito na equação de conservação da quantidade de movimento e no modelo Oldroyd-B tem-se $\beta \neq 0$, sendo este modelo uma combinação linear dos modelos UCM e newtoniano.

Sob condições de escoamento completamente desenvolvido, $\tau_{yy} = 0$, e a Eq. (4), para os modelos UCM e Oldroyd-B, determina para a tensão de corte,

$$\tau_{xy} + \lambda \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = \eta_p \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7)$$

O escoamento de arranque caracteriza-se pela aplicação súbita, no instante inicial, de um gradiente de pressão constante, $dp/dx = cte$, Nestas hipóteses, conjugando as Eqs. (3) e (7) de modo a eliminar a tensão de corte, obtém-se a seguinte equação do movimento

$$\left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{dp}{dx} + \frac{\eta_0}{\rho} \left(1 + \lambda_r \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8)$$

cujas soluções na forma adimensional é

$$u^*(t^*, y^*) = \frac{3}{2} \left(1 - y^{*2} \right) - \frac{48}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[n^{-3} \sin \left(\frac{1}{2} n \pi (1 + y^*) \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \alpha_n t^* \right) G(t^*) \right] \quad (9)$$

com

$$\alpha_n = \frac{1}{E} + \frac{1}{4} \beta \pi^2 n^2, \quad \beta_n = \sqrt{\pm(\alpha_n^2 - \pi^2 n^2 / E)} \quad \text{e} \quad \gamma_n = 1 - \frac{1}{4} (2 - \beta) E \pi^2 n^2$$

sendo E o número de elasticidade, definido pela razão entre os números de Weissenberg (We) e Reynolds (Re):

$$We = \frac{\lambda \bar{u}_{\infty}}{h} \quad Re = \frac{\rho \bar{u}_{\infty} h}{\eta_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{We}{Re} = \frac{\lambda \eta_0}{\rho h^2} \quad (10)$$

A velocidade $\bar{u}_{\infty} = -\frac{h^2}{3\eta_0} \frac{dp}{dx}$ é a velocidade média estacionária do escoamento Poiseuille newtoniano para fluido com viscosidade total η_0 . A solução dada pela Eq.(9) apresenta-se nas variáveis adimensionais

$$y^* = \frac{y}{h} \quad t^* = \frac{t}{(\rho h^2 / \eta_0)} \quad u^* = \frac{u}{\bar{u}_{\infty}} \quad (11)$$

e deve-se a Waters e King [3]. Nesta solução a função $G(T)$ depende do valor de $\alpha_n^2 - \pi^2 n^2 / E$. Se $\alpha_n^2 - \pi^2 n^2 / E > 0$ vem $\beta_n = \sqrt{\alpha_n^2 - \pi^2 n^2 / E}$ e

$$G(t^*) = \cosh \left(\frac{1}{2} \beta_n t^* \right) + \frac{\gamma_n}{\beta_n} \sinh \left(\frac{1}{2} \beta_n t^* \right) \quad (12a)$$

Se $\alpha_n^2 - \pi^2 n^2 / E < 0$ vem $\beta_n = \sqrt{\pi^2 n^2 / E - \alpha_n^2}$ e

$$G(t^*) = \cos \left(\frac{1}{2} \beta_n t^* \right) + \frac{\gamma_n}{\beta_n} \sin \left(\frac{1}{2} \beta_n t^* \right) \quad (12b)$$

Para simplificar a notação, o asterisco que indica variável adimensional será omitido daqui em diante. Chama-se a atenção para o facto do tempo adimensional ser aqui definido com base

numa escala de tempo difusiva (ver Eq. 11) e não com o tempo de relaxação do fluido, como é mais comum em situações envolvendo fluidos viscoelásticos. No caso newtoniano encontra-se o limite adequado fazendo $E \rightarrow 0$ e $\beta \rightarrow 1$; de forma directa, a solução é idêntica à Eq. (9), com $G(t) = 1$ e $\alpha_n = \pi^2 n^2 / 2$.

3. CÁLCULO DO TEMPO DE ARRANQUE

Procedendo ao limite quando $t \rightarrow \infty$ na Eq. (9), conclui-se que a solução transitória viscoelástica tende para a solução estacionária newtoniana. Com o objectivo de analisar a rapidez com que a solução dada pela Eq. (9) se aproxima da solução do escoamento Poiseuille, dependendo da elasticidade do fluido, foi definido e calculado um valor do tempo, que se designou por “tempo de arranque”, t_s . Para esta definição começou por se considerar a diferença entre a velocidade num determinado instante temporal e o seu valor para tempo infinito,

$$d = \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\infty\|$$

sendo a medida baseada na norma L_2 . Ou seja, a partir da Eq. (9) calcula-se o quadrado do desvio da solução relativamente aos valores estacionários newtonianos, que é dado por

$$\sigma^2 = \frac{1}{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} \left\{ -\frac{48}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[n^{-3} \sin\left(\frac{1}{2} \pi n (1 + y_j)\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha_n t\right) G(t) \right] \right\}^2 \quad (13)$$

Nesta equação N_y é o número de pontos interiores usados para resolver a variação espacial do perfil de velocidades; usou-se $N_y = 50$, mas o seu valor é irrelevante. Assumindo agora um parâmetro de tolerância ε (usou-se $\varepsilon = 0.01$), o tempo de arranque t_s (“start-up time”) corresponderá ao primeiro tempo a partir do qual se tem $\sigma < \varepsilon$, ou seja,

$$t > t_s \Rightarrow \sigma < \varepsilon \quad (14)$$

Este procedimento é adequado para o arranque de escoamento newtoniano; no entanto, para fluidos não newtonianos é usual haver oscilações durante o desenvolvimento inicial do escoamento, como mostrado na Figura 2. Esta figura mostra a evolução do parâmetro definido pela Eq. (13) para o modelo UCM e para vários valores do número de elasticidade. Como se vê, para $E = 0$ (fluido newtoniano) e $E = 0.1$ o decaimento de σ é monótono, sendo fácil definir o tempo de arranque de acordo com a inequação (14); para $E \geq 0.2$ o andamento da diferença entre a solução no tempo t e a solução em regime estacionário torna-se oscilante sendo possível definir de maneiras diversas esse tempo.

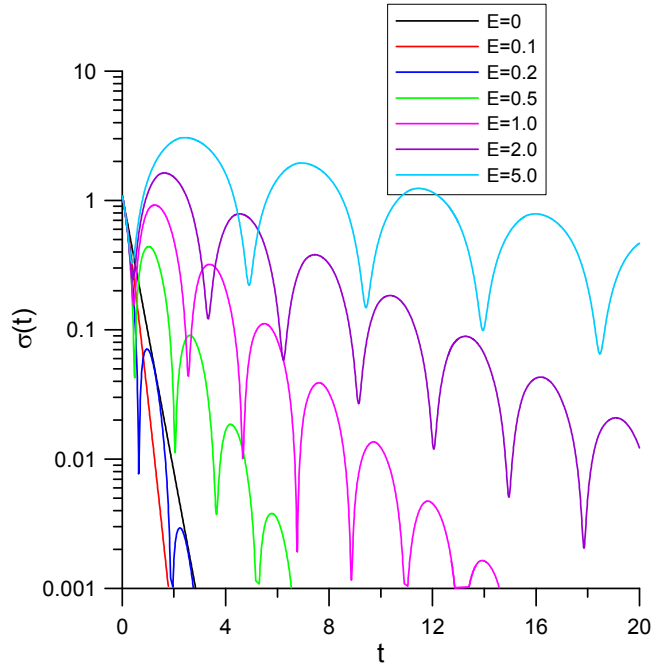


Figura 2. Variação da diferença entre a solução no tempo t e em infinito, para vários valores da elasticidade (modelo UCM).

Outras formas de medir o decaimento da solução até atingir o estado final estacionário conduzem também a comportamentos oscilatórios, com variações mais bruscas do que aquelas mostradas na Figura 2. De facto, a utilização da média quadrática permite de alguma forma suavizar a evolução temporal das velocidades. Por exemplo, a velocidade na linha central do canal varia como mostrado na Figura 3a, e a diferença com o valor final, que é $u_{0\infty} = 1.5$, como mostrado na Figura 3b. Existe uma descontinuidade evidente da derivada de $u_0(t) \equiv u(t, y=0)$, que faz com que seja mais problemático utilizar a velocidade na linha central para o cálculo do tempo de arranque. Fisicamente essa descontinuidade resulta da formação de uma frente de ondas de tensão no momento inicial, que se propaga nos tempos seguintes ao longo do canal, reflectindo-se nas paredes, e cuja magnitude se vai atenuando mas sem dissipação (muito claro sobretudo para valores de elasticidade elevados; ver [5]).

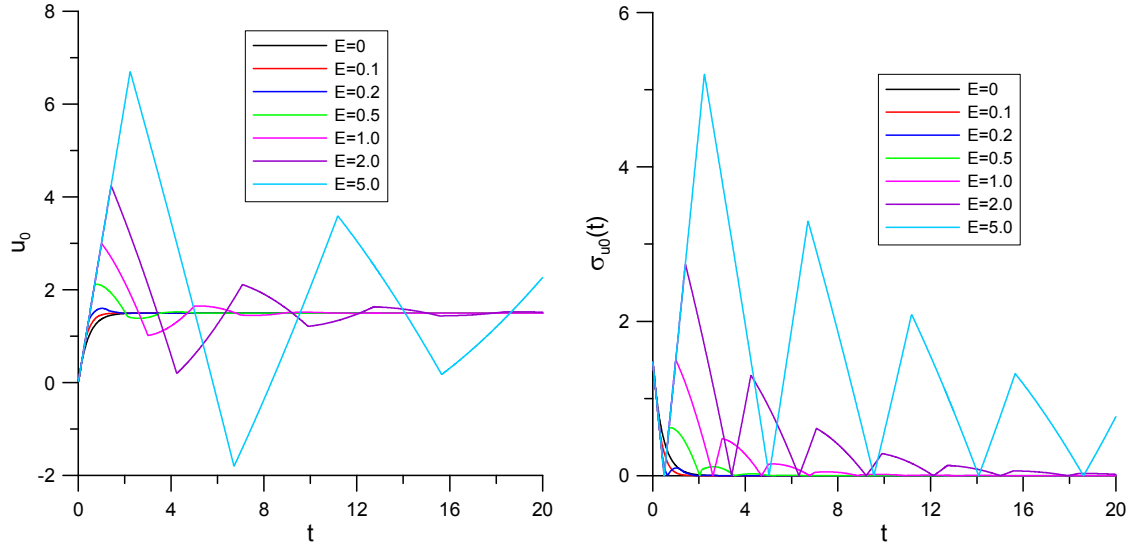


Figura 3. Variação com o tempo de: (a) velocidade na linha central; (b) diferença entre u_0 e o respectivo valor para tempo infinito (UCM, vários valores da elasticidade).

Estas figuras são úteis por sugerirem um procedimento para o cálculo do tempo de arranque. Basta fazer passar uma curva envelope pelos pontos correspondentes à diferença máxima entre a velocidade e o seu valor a infinito, e o tempo de arranque virá definido pela condição:

$$t_s = t \text{ para que } Env[\sigma_{\max}(t)] \leq \varepsilon \quad (15)$$

Embora não seja claro da Figura 3b, verificou-se que o decaimento dos pontos de σ máximo em escala semi-logarítmica aparece como uma recta, o que facilitará o processo de interpolação ou extrapolação necessário à determinação do tempo de arranque. A Figura 4, repetindo alguma informação da Figura 2 dada acima, ilustra este facto: os símbolos em cruz denotam os pontos de máximo local na variação de $\sigma(t)$, cada curva colorida correspondendo a um determinado valor de elasticidade E para fluido UCM, e as linhas pretas são ajustes automáticos, feitos pelo programa de gráficos, com variação exponencial.

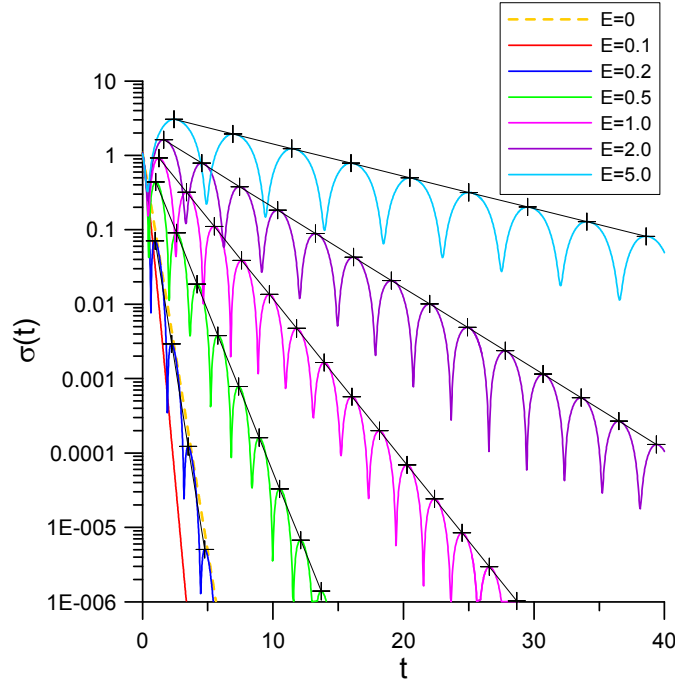


Figura 4. Ajuste em lei exponencial aos máximos da variação de $\sigma(t)$ para vários números de elasticidade no modelo de Maxwell.

O procedimento para o cálculo do tempo de arranque segue os passos:

1. Calcular os máximos locais da variação de $\sigma(t)$ num determinado intervalo $0 \leq t \leq t_{\max}$:

$$\sigma_{\max,k} = \max_{|t-t_k| < tol} \{\sigma(t_k)\}, \text{ onde } t_k \ (k=1,2,\dots,N_k) \text{ são os instantes temporais em que os } N_k \text{ máximos ocorrem.}$$

2. Ajustar uma curva suave (envelope) a esses pontos máximos, $Y(t)$ tal que $Y(t_k) = \sigma_{\max,k}$
3. Numa escala semi-logarítmica a variação da função $Y(t)$ é uma recta:

$$\log Y(t) = At + B \quad (16)$$

4. As constantes do ajuste podem ser dadas automaticamente pelo programa de gráficos (usando método de mínimos quadrados) ou calculadas com base em dois pontos de máximo local (t_1, Y_1) e (t_2, Y_2) :

$$A = (\log Y_2 - \log Y_1) / (t_2 - t_1) \text{ e } B = (t_2 \log Y_1 - t_1 \log Y_2) / (t_2 - t_1). \quad (17)$$

5. O tempo de arranque é calculado com base na Eq. (15), tendo em conta a variação exponencial de $Y(t)$ da Eq. (16), ou seja:

$$t_s = (\log(\varepsilon) - B) / A \quad (18)$$

4. RESULTADOS

É útil começar por observar a diferença entre o cálculo do tempo de arranque com base no procedimento óbvio, da Eq. (14), e o procedimento modificado acabado de descrever (Eqs. 15-18). A Figura 5 mostra a variação de t_s para o fluido UCM, sendo os resultados do método modificado designados como “UCM, novo”. Torna-se claro constatar que este novo procedimento permite obter uma variação suave do tempo de arranque como função do número de elasticidade, enquanto a avaliação directa de t_s dá azo ao aparecimento de oscilações. Num estudo anterior (Ref. [6]) este tipo de oscilações era patente.

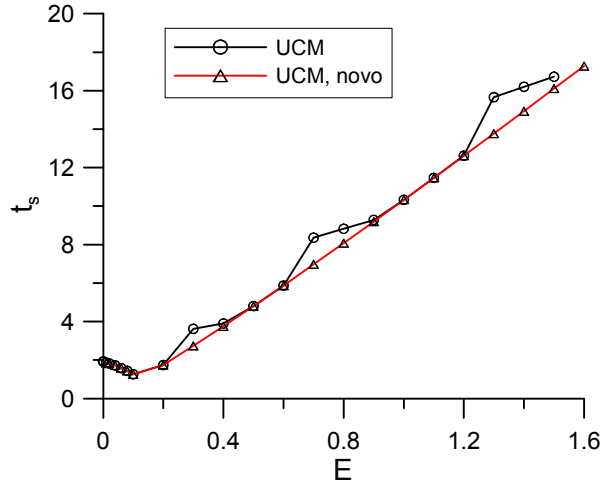


Figura 5. Efeito do método usado para cálculo do tempo de arranque (modelo UCM).

Os resultados para o modelo convectivo superior de Maxwell e para o modelo Oldroyd-B com a razão de retardamento, β , a variar de 0.1 a 0.5 são mostrados na Figura 6. Em geral observa-se um decaimento inicial do tempo de arranque, a partir do valor newtoniano (para $E = 0$, $(t_s)_N = 1.92$) até elasticidade de $E \approx 0.15$, seguido por um aumento considerável à medida que a elasticidade é progressivamente incrementada. O decaimento inicial de t_s é praticamente independente de β , enquanto que o posterior aumento significativo, à medida que E cresce, depende de forma clara do valor de β . Para o fluido UCM a variação é essencialmente linear; para $E \geq 0.3$, tem-se uma variação bem correlacionada pela recta:

$$t_s = -1.243 + 11.69 \times E \quad (19)$$

Para o fluido Oldroyd-B, a taxa de aumento de t_s diminui à medida que β aumenta e os efeitos elásticos se atenuam (relembramos que para $\beta = 1$ se volta a ter o fluido newtoniano). Essa variação é inferior a linear e um ajuste em polinómio do 2º grau,

$$t_s = a + bE + cE^2 \quad (20)$$

fornece os resultados que constam da Tabela 1 (válidos para $E \geq 0.3$). As curvas a vermelho na Figura 6 representam os ajustes lineares e quadráticos definidos pelas Eqs. (19) e (20), que são só aplicados para números de elasticidade superiores a 0.3.

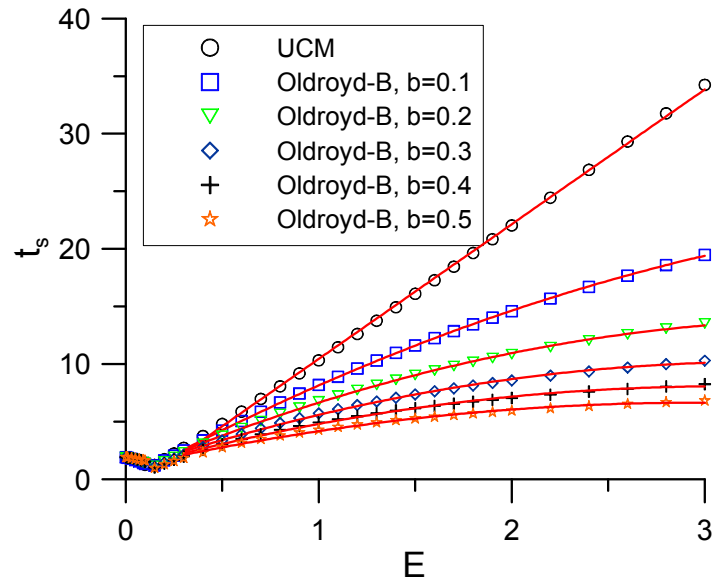
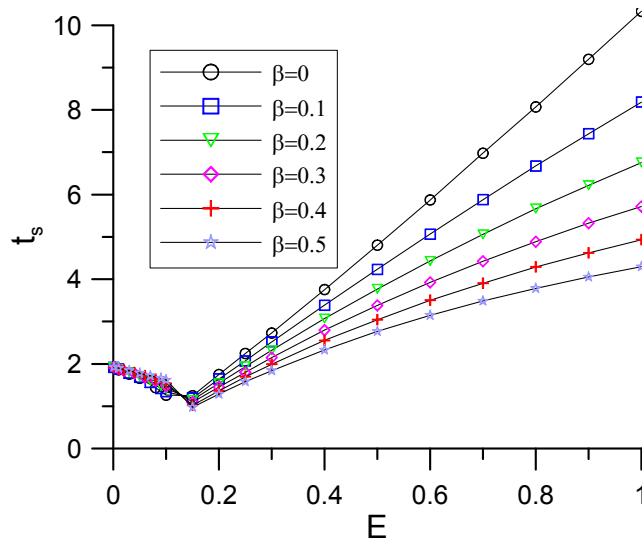


Figura 6. Variação do tempo de arranque com elasticidade (modelos UCM e Oldroyd-B).

β	a	b	c
0	-1.243	11.69	0
0.1	-0.0707	9.08	-0.863
0.2	0.456	7.15	-0.949
0.3	0.780	5.67	-0.854
0.4	0.953	4.59	-0.741
0.5	1.036	3.78	-0.637

Tabela 1. Coeficientes para ajuste quadrático (Eq. 20) do tempo de arranque.

A Figura 7 mostra em maior detalhe a variação do tempo de arranque para valores de elasticidade relativamente baixos ($E \leq 1$) de forma a quantificar o dito acima: na zona que antecede aquela em que t_s começa francamente a aumentar, existe pouca sensibilidade a variações da razão de retardamento β . No caso newtoniano, o valor encontrado é $t_s = 1.92$, ligeiramente diferente do valor resultante da expressão teórica (Eq. 9) quando se guarda somente o primeiro termo da soma infinita: $(48/1.5\pi^3)\exp(-(\pi^2 t_s)/4) = \varepsilon$, $\Rightarrow t_s = 1.88$ para $\varepsilon = 0.01$. Esta pequena diferença tem que ver com o facto de aqui se fazer a integração do perfil de velocidades ao longo da direcção transversal y . Nesta figura as linhas são simples ligações entre os dados, representados por símbolos. O valor mínimo do tempo de arranque ocorreu sempre para $E = 0.15$, independentemente da razão de retardamento β .

Figura 7. Detalhe da variação do tempo de arranque na zona $0 \leq E \leq 1$.

A evolução ao longo do tempo da diferença entre o perfil de velocidades num certo instante e em regime permanente para o caso UCM com número de elasticidade de 0.5 é mostrada na Figura 8. Para comparação mostra-se a correspondente variação para o caso newtoniano. Enquanto neste o decaimento da distância se faz de forma rápida e monótona, para o fluido viscoelástico existem oscilações cuja magnitude relativa se mantém sempre, uma vez que este modelo reológico não inclui viscosidade “newtoniana” ou de “solvente”. Assim, não existe mecanismo para dissipar as “ondas de choque” da tensão, velocidade e pressão que se

propagam pelo canal. A figura mostra ainda os valores dos máximos, tal como calculados pelo programa de computador, e a curva em ajuste exponencial (uma “recta” na escala semi-logarítmica utilizada) feita automaticamente pelo programa de gráficos. A função correspondente fornecida por este programa é $\ln(Y) = -0.9997960164 * X + 0.204864195$, que permite obter o tempo de arranque ($Y=0.01$) como $X=(\ln(0.01)- 0.204864195)/(-0.9997960164)=4.811$ (o valor obtido no programa de simulação, que está na Figura 6, é $t_s = 4.8045$).

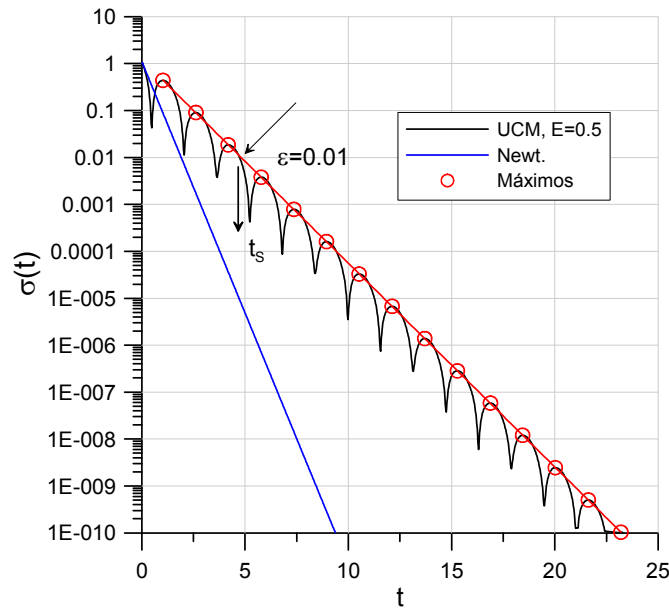


Figura 8. Evolução da “distância” $\sigma(t)$ com o tempo para os casos newtoniano e UCM com elasticidade $E = 0.5$.

Uma situação semelhante à anterior, mas para o modelo Oldroyd-B ($\beta = 0.4$) numa situação em que o comportamento oscilatório está a iniciar-se, é mostrada na Figura 9. O caso com $E = 0.15$ corresponde ao ponto de valor mínimo de t_s e repare-se que é preciso extrapolar a linha envelope para se obter esse valor. A linha a preto é para o fluido newtoniano, permitindo verificar que na situação mostrada os fluidos viscoelásticos aproximam-se mais depressa do regime permanente (em escala “normal”, por exemplo igual à da Figura 4, o decaimento seria muito rápido e as oscilações não seriam perceptíveis num gráfico). Tem ainda interesse verificar que para $E = 0.15$ o valor encontrado com o procedimento descrito acima foi $t_s = 1.0226$, enquanto o método “directo” (isto é, t para $\sigma(t) \leq \varepsilon$) daria $t_s = 1.22$. Num gráfico de t_s versus E , essa diferença seria suficiente para provocar uma pequena

perturbação, semelhante às observadas na Figura 5.

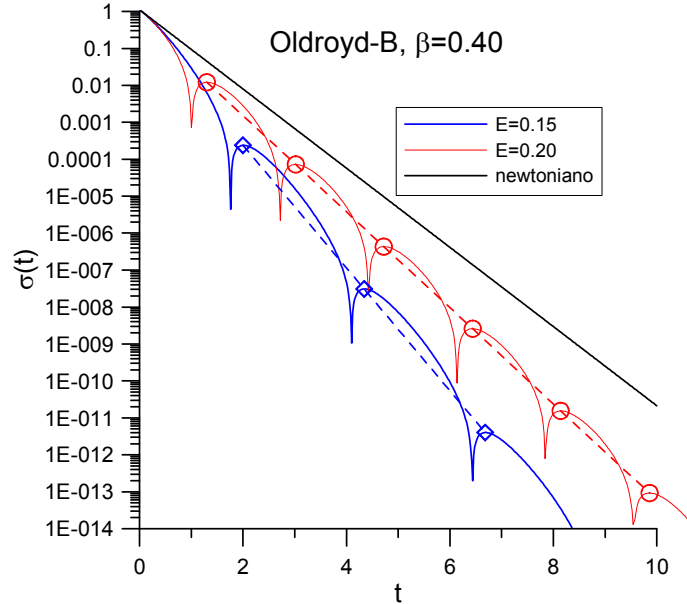


Figura 9. Evolução da “distância” $\sigma(t)$ para modelo Oldroyd-B, com 2 valores de elasticidade.

5. CONCLUSÕES

Foi implementado num programa de computador um método para calcular o tempo de arranque no escoamento de fluidos viscoelásticos em canais planos. Os resultados mostram um aumento significativo desse tempo, de 18 vezes quando a elasticidade passa de 0 (caso newtoniano) para $E = 3$, com o modelo UCM. Este incremento do tempo necessário para o escoamento se estabelecer tende a diminuir quando a elasticidade do fluido diminui (ou por uma redução de E , ou por aumento de β). Quando a elasticidade do fluido é só marginalmente superior a zero (ou seja, líquidos com elasticidade muito baixa, $E \leq 0.3$) o desenvolvimento do escoamento é mais rápido do que no caso newtoniano, e o tempo de arranque é quase independente do valor relativo da viscosidade do solvente (isto é, do parâmetro β).

REFERÊNCIAS

- [1] T.J. Bromwich, “An application of Heaviside's methods of viscous fluid motion”, J. London Math. Soc., Vol. 5, pp. 10-13 (1930).

- [2] J.G. Oldroyd, “On the formulation of rheological equations of state”, *Proc. R. Soc. A*, Vol. **200**, pp. 523-541 (1950).
- [3] N.D. Waters and M.J. King, “Unsteady flow of an elastico-viscous liquid”, *Rheologica Acta* Vol. **9**, pp. 345-35, (1970).
- [4] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1: Fluid Mechanics*, 2nd ed., John Wiley, New York (1987).
- [5] A.S.R. Duarte, A.I.P. Miranda, P.J. Oliveira, “Numerical and analytical modeling of unsteady viscoelastic flows: the start-up and pulsating test case problems”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. **154**, pp. 153-169 (2008).
- [6] N.P. Cheremisinoff, *Encyclopedia of Fluid Mechanics: Rheology and Non-newtonian Flows*, Gulf Publishing Company, Houston, Vol. **7**, pp. 71-72 (1988).