UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

DEPARTAMENTO DE ENGª ELECTROMECÂNICA

ANÁLISE DE CIRCUITOS

APONTAMENTOS DAS AULAS TEÓRICAS

JOÃO PAULO DA SILVA CATALÃO

FEVEREIRO 2009

Índice

Capítulo 1 Definições e Unidades ... 1

1.1 Sistema Internacional de Unidades ... 1

1.2 Carga Eléctrica ... 3

1.3 Corrente Eléctrica ... 4

1.4 Tensão Eléctrica ... 5

1.5 Potência e Energia ... 6

Capítulo 2 Leis Experimentais e Circuitos Simples ... 7

2.1 Elementos Eléctricos ... 7

2.2 Leis de Kirchhoff ... 12

2.3 Circuitos com uma só malha ... 13

2.4 Circuitos com apenas um par de nós ... 14

2.5 Dualidade ... 15

2.6 Associações de Elementos ... 15

2.7 Transformação Triângulo-Estrela ... 18

2.8 Divisor de Tensão e Divisor de Corrente ... 19

Capítulo 3 Técnicas Simples de Análise de Circuitos ... 21

3.1 Número de Equações Independentes ... 21

3.2 Método dos Nós ... 22

3.3 Método das Malhas ... 24

3.4 Linearidade e Sobreposição ... 25

Capítulo 4 Técnicas de Simplificação de Circuitos **28**

4.1 Fonte de Tensão e Fonte de Corrente Reais 28

4.2 Fontes Equivalentes 30

4.3 Teoremas de Thévenin e de Norton 32

4.4 Transferência Máxima de Potência 36

Capítulo 5 Amplificador Operacional **38**

5.1 Características Ideais do Amplificador Operacional 38

5.2 Características Reais do Amplificador Operacional 39

5.3 Circuito Inversor 43

5.4 Circuito Não Inversor 44

Capítulo 6 Sinais **45**

6.1 Função Escalão Unitário 45

6.2 Função Impulso Unitário 45

6.3 Função Rampa Unitária 46

6.4 Função Exponencial 47

6.5 Função Sinusoidal 47

Capítulo 7 Capacidade e Auto-Indução **48**

7.1 Condensador 48

7.2 Bobina 51

Capítulo 8 Circuitos de Primeira Ordem **54**

8.1 Circuitos RL e RC Simples 54

8.2 Circuitos Diferenciador e Integrador 56

8.3 Resposta Completa de Circuitos RL e RC 58

Capítulo 9 Circuitos de Segunda Ordem **61**

9.1 Circuito RLC 61

Capítulo 1 – Definições e Unidades

1.1 Sistema Internacional de Unidades

Unidades Básicas (7)

- m (metro) → distância
- kg (quilograma) → massa
- s (segundo) → tempo
- A (Ampere) → corrente eléctrica
- K (Kelvin) → temperatura
- mol (mole) → quantidade de matéria
- cd (candela) → intensidade luminosa

Unidades Suplementares (2)

- rad (radiano) → ângulo plano
- sr (esterradiano) → ângulo sólido

Algumas Regras

- Não se deve usar plural dos nomes (ou dos símbolos).
- Os símbolos de unidades com nomes de pessoas devem ser escritos com letras maiúsculas, mas o nome da unidade não necessariamente.

Nota

- O caso do kg (quilograma) é singular pois é a unidade básica do SI para massa e é múltiplo de uma outra unidade, o g (grama), que foi a unidade básica de massa do sistema CGS, que o SI veio a substituir.

Múltiplos e Submúltiplos

deca (da) = $\times 10$	deci (d) = $\times 10^{-1}$
hecto (h) = $\times 10^{2}$	centi (c) = $\times 10^{-2}$
quilo (k) = $\times 10^{3}$	mili (m) = $\times 10^{-3}$
mega (M) = $\times 10^{6}$	micro (μ) = $\times 10^{-6}$
giga (G) = $\times 10^{9}$	nano (n) = $\times 10^{-9}$
tera (T) = $\times 10^{12}$	pico (p) = $\times 10^{-12}$
peta (P) = $\times 10^{15}$	fento (f) = $\times 10^{-15}$
exa (E) = $\times 10^{18}$	ato (a) = $\times 10^{-18}$
zeta (Z) = $\times 10^{21}$	zepto (z) = $\times 10^{-21}$
yota (Y) = $\times 10^{24}$	yocto (y) = $\times 10^{-24}$

Alguns Exemplos e Contra-Exemplos

- h ~~h.~~ ~~hs~~
- mm
- μA
- TJ
- 1 km^2 = 10^6 m^2
- 0,2 nm, e não 0,2 mμm (não se deve usar mais de um prefixo)
- 1 GHz, e não 1 kMHz (não se deve usar mais de um prefixo)
- 20 μm, e não 20 μ (um prefixo associa-se sempre a uma unidade)
- 20 kg, e não 20 k (um prefixo associa-se sempre a uma unidade)
- 10 m/s^2 ou 10 m.s^{-2}, mas não 10 m/s/s
- N.m ou Nm

Unidades usadas no SI sem lhe pertencerem

- min (minuto) = 60 s
- h (hora) = 60 min = 3600 s
- d (dia) 24 h = 86400 s
- º (grau) = (π/180) rad
- ´ (minuto) = (1/60)º = (π/10800) rad
- ´´ (segundo) = (1/60)´= (π/648000) rad
- l, L (litro) = 1 dm^3 = 10^{-3} m^3
- t (tonelada) = 10^3 kg

Unidades derivadas do SI (usadas em Análise de Circuitos)

- Hz (Hertz) = s^{-1} p/ frequência
- N (Newton) = $kg.m/s^2$ p/ força
- J (Joule) = N.m p/ trabalho, energia
- W (Watt) = J s^{-1} p/ potência
- V (Volt) = J/C p/ tensão ou diferença de potencial
- Ω (Ohm) = V/A p/ resistência eléctrica
- ℧ (Mho) = Ω^{-1} p/ condutância eléctrica
- C (Coulomb) = A.s p/ quantidade de energia eléctrica
- H (Henry) = V.s / A = J/A^2 p/ indutância eléctrica
- F (Farad) = C/V = A^3s^2 / J p/ capacitância eléctrica

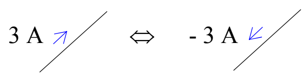
1.2 Carga Eléctrica

- É uma propriedade intrínseca da matéria.
- Representa a quantidade de electricidade responsável por fenómenos eléctricos.
- Unidade: C (Coulomb) em homenagem a Charles Coulomb, cientista francês (1736-1806); carga de um electrão = $-1{,}602\times10^{-19}$ C; pelo que, 1 C representa a carga combinada de cerca de $6{,}24\times10^{18}$ electrões.
- Símbolo: Q (quando não varia no tempo); q ou q(t) (quando varia no tempo).

- Tem magnitude e polaridade ("+" ou "-"); cargas iguais repelem-se, cargas diferentes atraem-se.
- Carga eléctrica em movimento representa uma corrente eléctrica.

1.3 Corrente Eléctrica

- Taxa de variação, no tempo, da carga eléctrica que passa por um determinado ponto de referência.
- Unidade: A (Ampere) em homenagem a André-Marie Ampere, cientista francês (1755-1836).
- Símbolo: i(t)
- $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$ $\qquad$ 1 A = 1 C/s
- Tem magnitude e sentido.



(a seta indica o sentido do fluxo de corrente)

- Relação carga - corrente eléctrica:

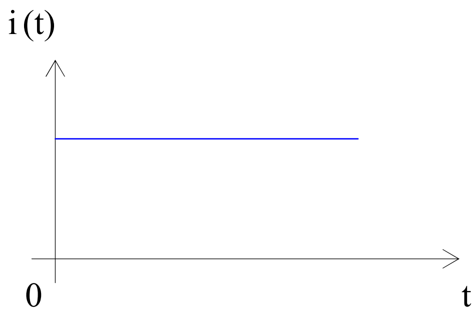
  A carga eléctrica transferida entre os instantes t_0 e t pode ser expressa como

  $$q(t) - q(t_0) = q\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} i \, dt$$

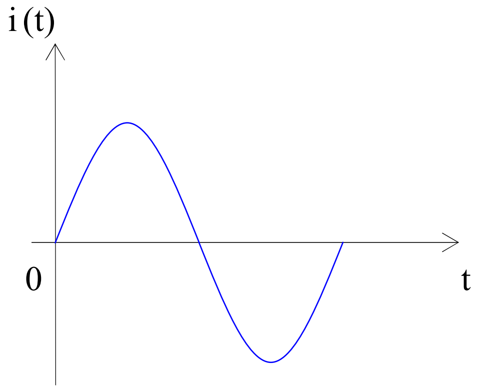
  A carga eléctrica total transferida ao longo de todo o tempo é obtida

  $$q(t) = \int_{t_0}^{t} i \, dt + q(t_0)$$

- Alguns tipos de corrente eléctrica:



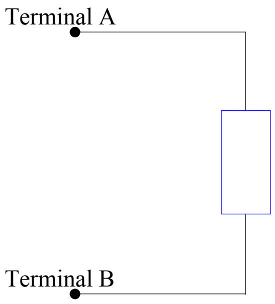
Corrente contínua (corrente que circula sempre no mesmo sentido com uma intensidade constante)



Corrente alternada (corrente de sentido variável)

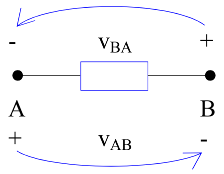
1.4 Tensão Eléctrica

Considere o seguinte elemento:



A corrente pode entrar ou sair de um elemento por dois caminhos diferentes: de A para B; de B para A.

- A tensão eléctrica é o trabalho (ou energia) necessário para mover uma carga positiva de 1 C através do elemento, de um terminal para o outro.
- Unidade: V (Volt)
- Símbolo: V ou v(t)
- $v(t) = \dfrac{dw}{dq}$ $\qquad$ 1 V = 1 J/C
- Tem magnitude e direcção. Pode ser positiva ou negativa.

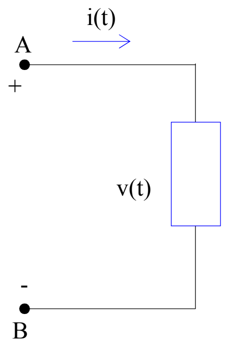


$v_{AB} = - v_{BA}$

os sinais “+” e “-”, ou a seta, indicam o sentido positivo da diferença de potencial

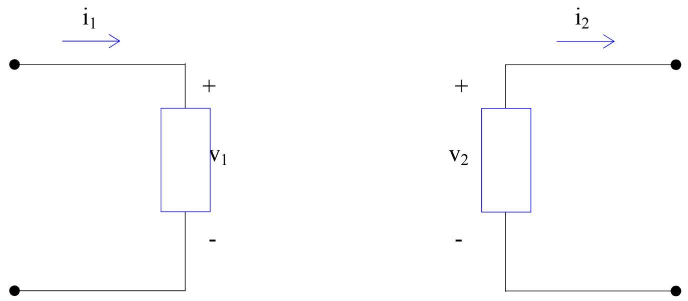
A energia dispendida para fazer a corrente passar pelo elemento pode manifestar-se de várias formas: armazenada para ser usada (baterias); calor (resistências); energia acústica; luz (lâmpadas).

1.5 Potência e Energia



- Potência: $p(t) = v(t)\,i(t)$ ou $p = v\,i$
- Unidade: W (Watt) em homenagem a James Watt, inventor escocês (1736-1819).
- A potência mede a taxa de variação, no tempo, da energia transformada.
- $p(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq}.\frac{dq}{dt} = v\,i$ $\qquad$ 1 W = 1 J/s

Convenção passiva: Se a corrente atravessa o elemento de A para B, a tensão criada vai ter o pólo positivo em A, e o pólo negativo em B; neste caso, a potência $p = v\,i$ diz-se como sendo "absorvida" pelo elemento, se for positiva; de outro modo, diz-se que a potência é "fornecida" pelo elemento.



$p_1 = v_1 \times i_1$ potência absorvida

$p_2 = v_2 \times (-i_2)$ potência absorvida

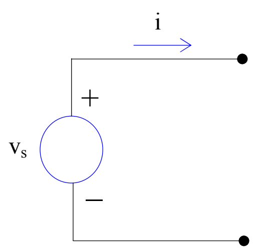
$p_2 = v_2 \times i_2$ potência fornecida

Capítulo 2 – Leis Experimentais e Circuitos Simples

2.1 Elementos Eléctricos

- *Elementos Activos* – São elementos que, normalmente, fornecem potência para outros elementos do circuito. Exemplos: Fontes de Tensão; Fontes de Corrente.
- *Elementos Passivos* – São elementos que absorvem potência. Exemplos: Resistências.

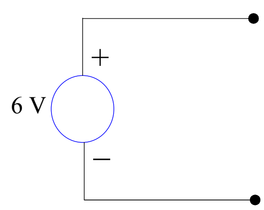
Fonte de Tensão (ideal)



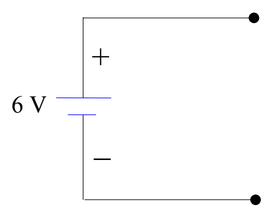
A tensão nos terminais do elemento (i.e., da fonte de tensão) é totalmente independente da corrente que passa por ele.

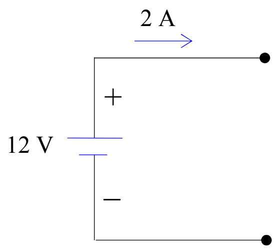
Portanto, se v_s (t) = 10 t^2 V, então, em t = 1 s, v_s (t) = 10 V; em t = 2 s, v_s (t) = 40 V, seja qual for o fluxo de corrente que passa pelo elemento. Potência fornecida pela fonte de tensão: $p = v_s \times i$

Fonte de tensão constante ou bateria

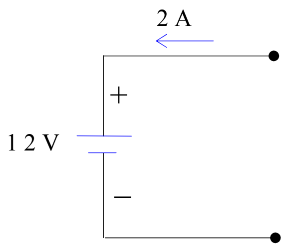


ou



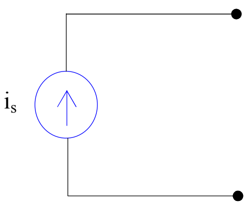


A bateria está a fornecer 24 W de potência (descarregar)



A bateria está a absorver 24 W de potência (recarregar)

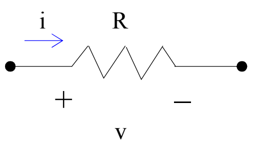
Fonte de Corrente (ideal)



A corrente que atravessa o elemento (i.e., a fonte de corrente) é totalmente independente da diferença de potencial nos seus terminais.

Se i_s é constante $\Longrightarrow$ fonte de corrente contínua.

Resistência



Lei de Ohm: $v = R\,i$

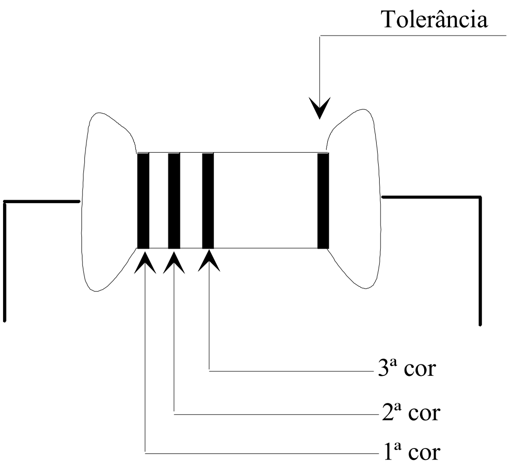
R = Resistência $\Longrightarrow$ constante de proporcionalidade

Unidade: Ω (Ohm) em homenagem a George Simon Ohm, físico alemão (1787-1854); 1 Ω = 1 V/A.

Potência absorvida pela resistência: $p = v\,i = R\,i^2 = v^2 / R$

Um *curto-circuito* corresponde a uma resistência nula – fio ideal; um *circuito aberto* corresponde a uma resistência infinita.

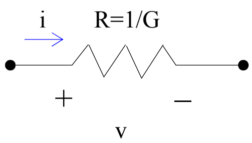
Código de cores para as resistências: os valores das resistências disponíveis no mercado são identificados por um conjunto de riscas coloridas obedecendo a uma codificação pré-definida.



Cor	1ª e 2ª Cor	3ª Cor (nº de zeros)
Preto	0	
Castanho	1	0
Vermelho	2	00
Laranja	3	000
Amarelo	4	0 000
Verde	5	00 000
Azul	6	000 000
Violeta	7	0 000 000
Cinzento	8	00 000 000
Branco	9	000 000 000

Cor	Tolerância
Prateado	10 %
Dourado	5%

Condutância



A condutância é o inverso da resistência: $G = 1/R$

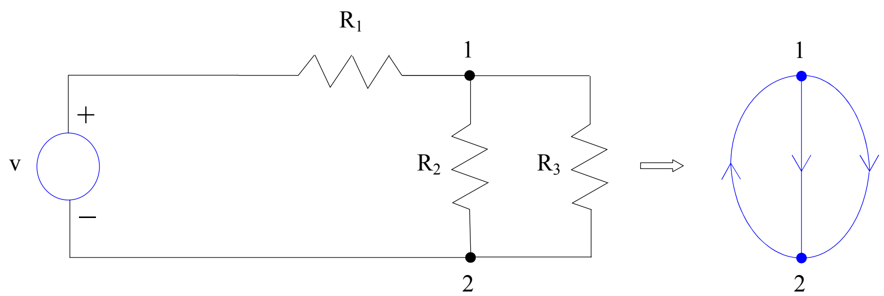
Unidade: ℧ (Mho) ou S (Siemens) = Ω^{-1}

A Lei de Ohm fica: $i = G\,v$; potência absorvida pela resistência: $p = v\,i = G\,v^2 = i^2/G$

A ligação de dois ou mais elementos denomina-se *rede*. Se a rede possui pelo menos um caminho fechado, de modo a que a corrente eléctrica possa fluir continuamente, denomina-se *circuito eléctrico*. Portanto, todo o circuito é uma rede, mas nem toda a rede é um circuito. A rede que possui pelo menos um elemento activo denomina-se *rede activa*. Se a rede não contém qualquer elemento activo denomina-se *rede passiva*.

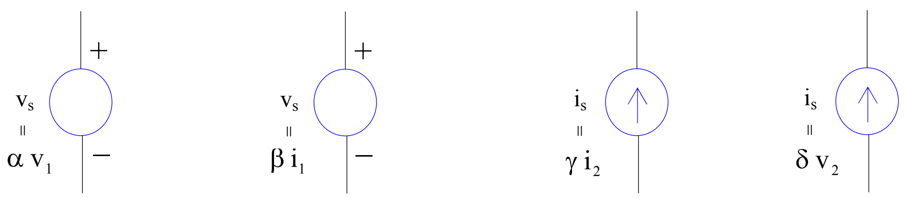
Um *nó* é um ponto onde dois ou mais elementos se conectam. Uma *malha* ou circulação é um percurso fechado quando nós vamos de nó em nó, começando e acabando no mesmo nó. Um *ramo* é um caminho com apenas um elemento. Ou seja, um ramo consiste em um elemento e os dois nós (um em cada terminal). Um *caminho* é um percurso sem repetir o mesmo nó. Uma *malha independente* é uma malha que não inclui no seu interior nenhuma outra circulação.

Um *grafo orientado do circuito* consiste num redesenho do circuito com cada ramo substituído por uma linha que contém apenas o sentido da corrente segundo a convenção passiva.

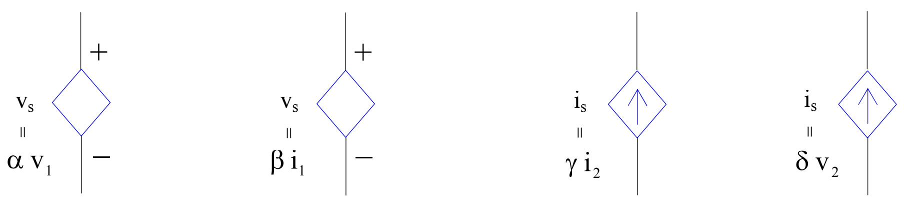


Fontes Dependentes

Uma fonte dependente fornece uma tensão/corrente de saída que depende de alguma outra variável do circuito. Assim, podemos ter:

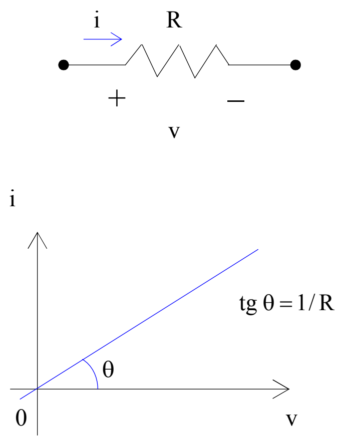


onde v_1, v_2, i_1 e i_2 são tensões e correntes em outra parte do circuito. A seguinte notação também pode ser usada:

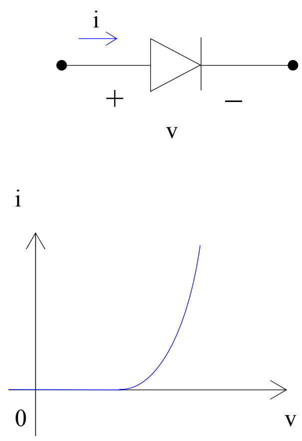


Características Tensão-Corrente

Resistência

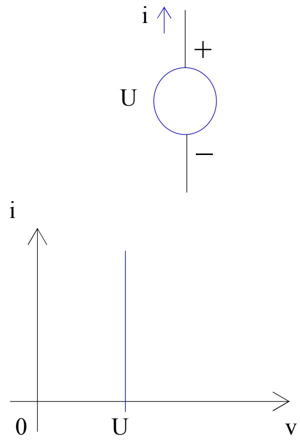


Díodo

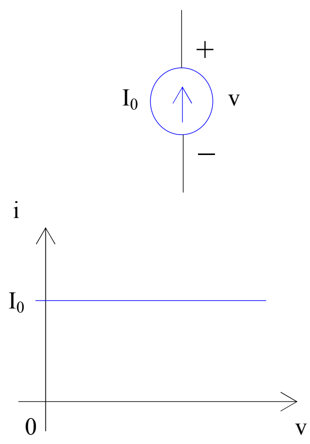


O díodo permite efectuar a rectificação da corrente eléctrica. O díodo deixa passar a corrente num dos sentidos e impede a sua passagem em sentido inverso. A partir de um dado valor positivo da tensão o díodo começa a conduzir, mas não de uma forma linear.

Fonte de Tensão (ideal)



Fonte de Corrente (ideal)

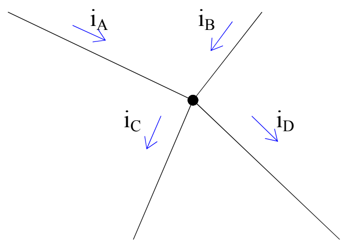


2.2 Leis de Kirchhoff

As duas *Leis de Kirchhoff* são as ferramentas básicas para a análise de circuitos, e as suas aplicações simplificam esta análise. Geralmente faz-se uso dessas leis para encontrar correntes e tensões desconhecidas.

Lei dos Nós (KCL) – Baseada na conservação de cargas, i.e., não há acréscimo ou desaparecimento de cargas num nó; no nó a carga é constante:

$$i_A + i_B = i_C + i_D$$



A soma das correntes que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem desse mesmo nó

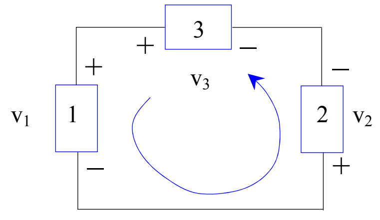
Equivalentemente: $i_A + i_B - i_C - i_D = 0$ (considerando positivas as correntes que entram e negativas as que saem)

ou $-i_A - i_B + i_C + i_D = 0$ (vice-versa)

Ou seja, a Lei dos Nós fica: $\sum_{n=1}^{N} i_n = 0$

Lei das Malhas (KVL) – A conservação da energia requer que por qualquer percurso fechado, ou malha, a soma algébrica das tensões seja igual a zero:

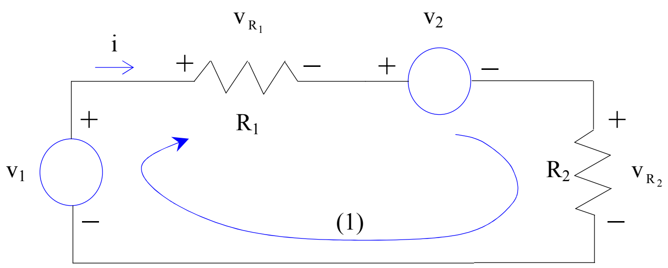
$$v_1 + v_2 - v_3 = 0$$



Ou seja, a Lei das Malhas fica: $\sum_{n=1}^{N} v_n = 0$

2.3 Circuitos com uma só malha

Considere o seguinte circuito simples, com uma só malha (1):



As resistências nos fios são desprezáveis ou estão incluídas nas resistências R_1 e R_2. Os valores de v_1, v_2, R_1 e R_2 são conhecidos. Pretende-se determinar: tensões v_{R_1} e v_{R_2}; corrente que passa por cada elemento; potência absorvida por cada elemento.

Pelas Lei dos Nós, a corrente i é a mesma para todos os elementos deste circuito. Pelo que, *Elementos em Série* têm a "mesma" corrente.

Aplicando a Lei das Malhas (considerando o sentido dos ponteiros do relógio como sendo positivo), e a Lei de Ohm, obtém-se:

$$-v_1 + v_{R_1} + v_2 + v_{R_2} = 0 \Leftrightarrow -v_1 + R_1\, i + v_2 + R_2\, i = 0 \Leftrightarrow i = \frac{v_1 - v_2}{R_1 + R_2}$$

Se $R_1 = 30\,\Omega$, $R_2 = 15\,\Omega$, $v_1 = 120\text{ V}$, $v_2 = 30\text{ V}$, então:

$i = 2\text{ A}$, $v_{R_1} = 60\text{ V}$, $v_{R_2} = 30\text{ V}$.

Potência absorvida pela fonte de 120 V: $p = 120 \times (-2) = -240\text{ W}$ (fornece 240 W)

Potência absorvida pela fonte de 30 V: $p = 30 \times 2 = 60\text{ W}$

Potência absorvida pela resistência de $30\,\Omega$: $p = v_{R_1}\, i = 60 \times 2 = 120\text{ W}$

ou $p = R_1\, i^2 = 30 \times 2^2 = 120\text{ W}$

Potência absorvida pela resistência de $15\,\Omega$: $p = v_{R_2}\, i = 30 \times 2 = 60\text{ W}$

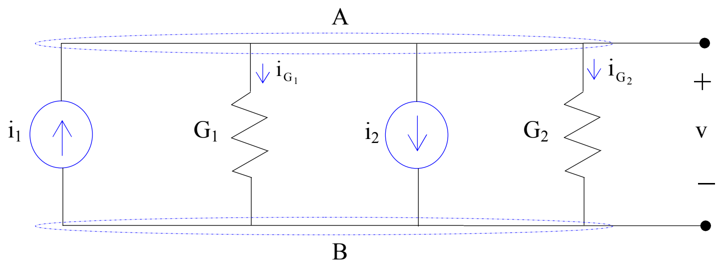
ou $p = R_2\, i^2 = 15 \times 2^2 = 60\text{ W}$

Potência total absorvida pelos 4 elementos do circuito: $-240 + 60 + 120 + 60 = 0\text{ W}$

É importante observar que se a corrente i tivesse sido escolhida com o sentido contrário, isso não iria alterar as respostas obtidas: o resultado seria o mesmo.

2.4 Circuitos com apenas um par de nós

Considere o seguinte circuito simples, com apenas um par de nós (A-B):



Os valores de i_1, i_2, G_1 e G_2 são conhecidos. Pretende-se determinar: correntes i_{G_1} e i_{G_2}; tensão nos terminais de cada elemento; potência absorvida por cada elemento.

Pelas Lei das Malhas, a tensão v é a mesma para todos os elementos deste circuito. Pelo que, *Elementos em Paralelo* têm a "mesma" tensão.
Aplicando a Lei dos Nós (considerando, para o nó A, positivas as correntes que entram e negativas as que saem), e a Lei de Ohm, obtém-se:

$$i_1 - i_{G_1} - i_2 - i_{G_2} = 0 \Leftrightarrow i_1 - G_1\, v - i_2 - G_2\, v = 0 \Leftrightarrow v = \frac{i_1 - i_2}{G_1 + G_2}$$

Se $G_1 = 30\ \mho$, $G_2 = 15\ \mho$, $i_1 = 120\ \text{A}$, $i_2 = 30\ \text{A}$, então:

$v = 2\ \text{V}$, $i_{G_1} = 60\ \text{A}$, $i_{G_2} = 30\ \text{A}$.

Potência absorvida pela fonte de 120 A: $p = 2 \times (-120) = -240\ \text{W}$ (fornece 240 W)

Potência absorvida pela fonte de 30 A: $p = 2 \times 30 = 60\ \text{W}$

Potência absorvida pela condutância de $30\ \mho$: $p = v\, i_{G_1} = 2 \times 60 = 120\ \text{W}$

ou $p = G_1\, v^2 = 30 \times 2^2 = 120\ \text{W}$

Potência absorvida pela resistência de $15\ \mho$: $p = v\, i_{G_2} = 2 \times 30 = 60\ \text{W}$

ou $p = G_2\, v^2 = 15 \times 2^2 = 60\ \text{W}$

Potência total absorvida pelos 4 elementos do circuito: $-240 + 60 + 120 + 60 = 0\ \text{W}$

É importante observar que se a tensão v tivesse sido escolhida com a polaridade contrária, isso não iria alterar as respostas obtidas: o resultado seria o mesmo.

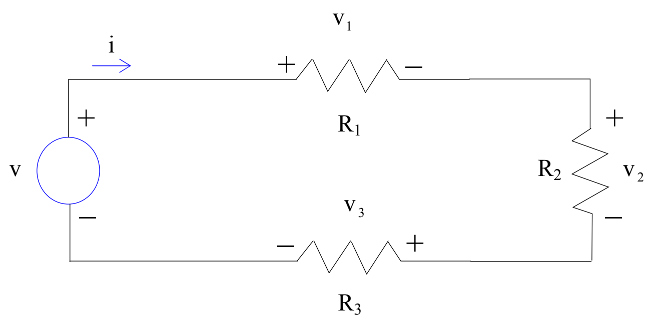
2.5 Dualidade

O estudo de um circuito simples está sempre ligado a uma *dualidade*. De facto, se substituirmos correntes por tensões (e vice-versa), resistências por condutâncias (e vice-versa), par de nós por malha única (e vice-versa), Lei dos Nós por Lei das Malhas (e vice-versa), paralelo por série (e vice-versa), obtemos num e noutro caso as mesmas equações, as mesmas conclusões e até os mesmos resultados numéricos.

Esta propriedade que acompanha permanentemente a análise de circuitos designa-se por *dualidade*. A *dualidade* ajuda-nos a melhor compreender e assimilar as técnicas de análise de circuitos.

2.6 Associações de Elementos

Resistências em Série



Aplicando a Lei das Malhas e a Lei de Ohm, obtém-se:

$$-v + v_1 + v_2 + v_3 = 0 \Leftrightarrow v = R_1\, i + R_2\, i + R_3\, i \Leftrightarrow v = (R_1 + R_2 + R_3)\, i \Leftrightarrow v = R_{eq}\, i$$

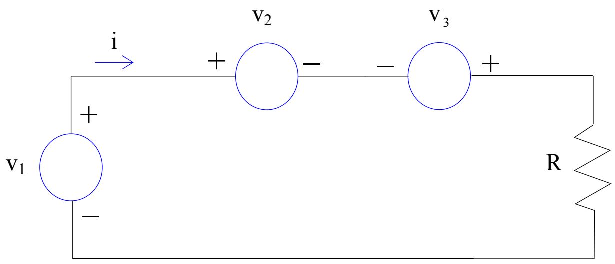
Portanto, as resistências em série (R_1, R_2 e R_3) podem ser substituídas no circuito por:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

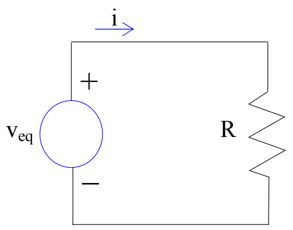
De forma geral, a *resistência equivalente* a um conjunto de resistências em série é dada por: $R_{eq} = \sum_{i=1}^{I} R_i$

Fontes de Tensão (ideais) *em Série*

As fontes de tensão em série também podem ser combinadas, devendo-se ter em conta a polaridade da tensão. Considere, por exemplo, o seguinte circuito:

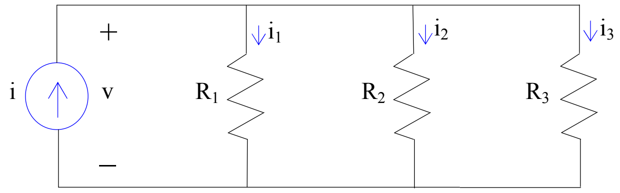


Este circuito pode ser representado, de maneira equivalente, por:



sendo: $v_{eq} = v_1 - v_2 + v_3$

Resistências em Paralelo



Aplicando a Lei dos Nós e a Lei de Ohm, obtém-se:

$$i - i_1 - i_2 - i_3 = 0 \Leftrightarrow i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} \Leftrightarrow i = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v \Leftrightarrow i = \frac{1}{R_{eq}} v$$

Portanto, as resistências em paralelo (R_1, R_2 e R_3) podem ser substituídas no circuito por: $R_{eq} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}$

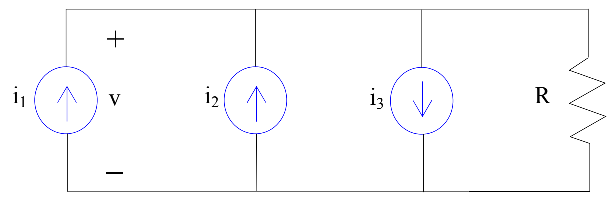
Em termos de condutância, têm-se: $G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3$

De forma geral, a *resistência equivalente* a um conjunto de resistências em paralelo é dada por: $R_{eq} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{I} \dfrac{1}{R_i}}$

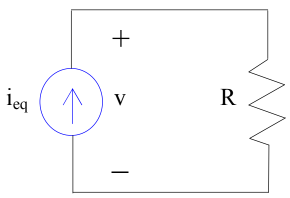
No caso particular de apenas duas resistências em paralelo, tem-se: $R_{eq} = \dfrac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$

Fontes de Corrente (ideais) *em Paralelo*

As fontes de corrente em paralelo também podem ser combinadas, devendo-se ter em conta o sentido da corrente. Considere, por exemplo, o seguinte circuito:

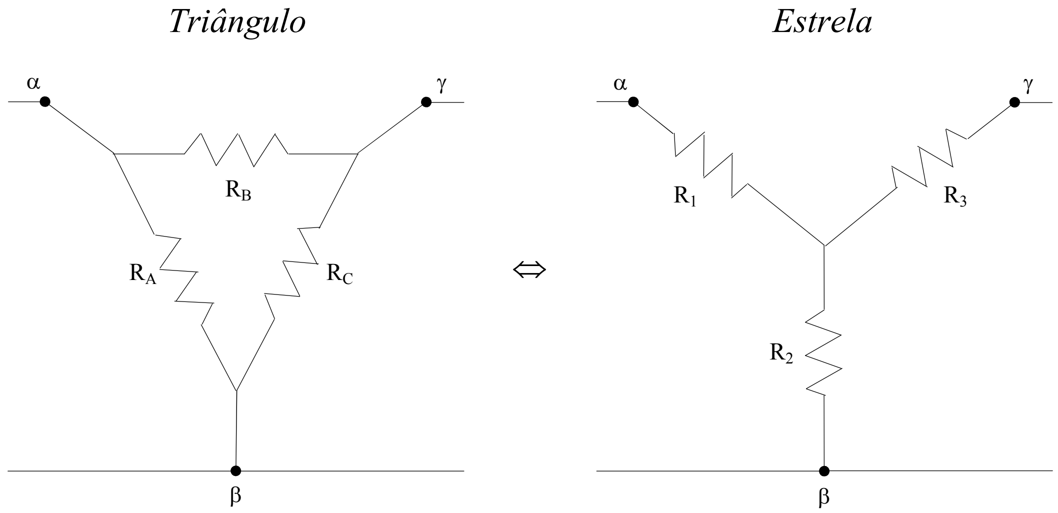


Este circuito pode ser representado, de maneira equivalente, por:



sendo: $i_{eq} = i_1 + i_2 - i_3$

2.7 Transformação Triângulo-Estrela



$$R_{\alpha-\beta} = R_A // (R_B + R_C) \qquad R_{\alpha-\beta} = R_1 + R_2$$

$$R_{\beta-\gamma} = R_C // (R_A + R_B) \qquad R_{\beta-\gamma} = R_2 + R_3$$

$$R_{\alpha-\gamma} = R_B // (R_A + R_C) \qquad R_{\alpha-\gamma} = R_1 + R_3$$

Para que os dois circuitos sejam equivalentes, tem-se que:

$$\frac{R_A \times (R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C} = R_1 + R_2$$

$$\frac{R_C \times (R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C} = R_2 + R_3$$

$$\frac{R_B \times (R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C} = R_1 + R_3$$

Assim, uma ligação em triângulo pode ser substituída por uma ligação em estrela, e vice-versa, atendendo a que:

$$R_A = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3} \qquad R_1 = \frac{R_AR_B}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_B = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2} \qquad R_2 = \frac{R_AR_C}{R_A + R_B + R_C}$$

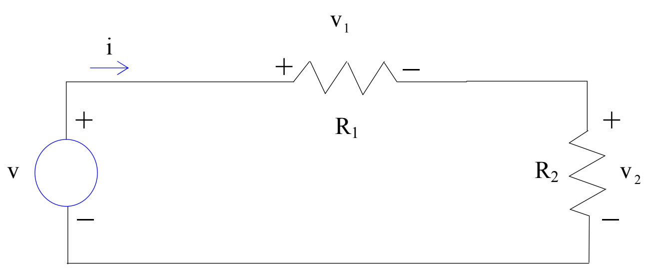
$$R_C = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1} \qquad R_3 = \frac{R_BR_C}{R_A + R_B + R_C}$$

As relações anteriores podem ser obtidas pelas duas regras seguintes:

- *Transformação* $Y-\Delta$: Qualquer resistência do triângulo é igual à soma dos produtos, dois a dois, das resistências da estrela, dividida pela resistência da estrela que lhe é oposta.
- *Transformação* $\Delta-Y$: Qualquer resistência da estrela é igual ao produto das duas resistências adjacentes do triângulo, dividido pela soma das três resistências do triângulo.

2.8 Divisor de Tensão e Divisor de Corrente

Divisor de Tensão



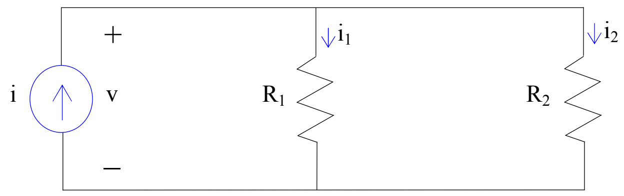
Aplicando a Lei de Ohm, obtém-se: $v_2 = R_2\ i$

A resistência equivalente é dada por: $R_{eq} = R_1 + R_2$

Logo: $i = \dfrac{v}{R_{eq}} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\, v$

De forma semelhante: $v_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\, v$

Divisor de Corrente



Aplicando a Lei de Ohm, obtém-se: $i_2 = \dfrac{v}{R_2}$

A resistência equivalente é dada por: $R_{eq} = \dfrac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$

Logo: $v = R_{eq}\, i \quad \Rightarrow \quad i_2 = \dfrac{\dfrac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}}{R_2}\, i \;\Leftrightarrow\; i_2 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\, i$ ou $i_2 = \dfrac{G_2}{G_1 + G_2}\, i$

De forma semelhante: $i_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\, i$ ou $i_1 = \dfrac{G_1}{G_1 + G_2}\, i$

Capítulo 3 – Técnicas Simples de Análise de Circuitos

3.1 Número de Equações Independentes

Considere um determinado circuito em que:

- N = nº de *nós*
- B = nº de *ramos* = nº de *elementos*

Circuito Planar – Se é possível desenhar o diagrama do circuito numa superfície plana de tal forma que nenhum ramo cruze outro ramo.

Teorema 1

Existem exactamente $(N-1)$ *equações independentes* extraídas da Lei dos Nós aplicada em $(N-1)$ nós do circuito.

Teorema 2

Todas as tensões nos ramos podem ser expressas em termos de apenas $(N-1)$ *tensões nodais* independentes.

Teorema 3

Existem exactamente $L=(B-N+1)$ *equações independentes* extraídas da Lei das Malhas aplicada em $L=(B-N+1)$ malhas do circuito. Se o circuito é planar, então L corresponde ao número de malhas independentes.

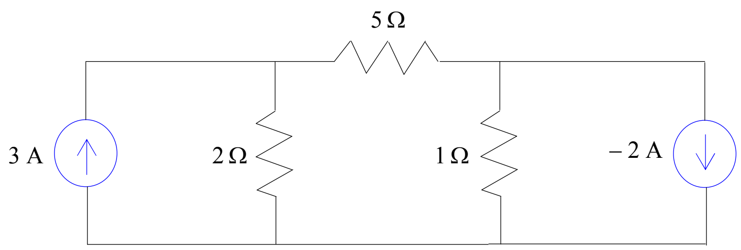
Teorema 4

Todas as correntes nos ramos podem ser expressas em termos de apenas $L = (B - N + 1)$ *correntes de malha* independentes.

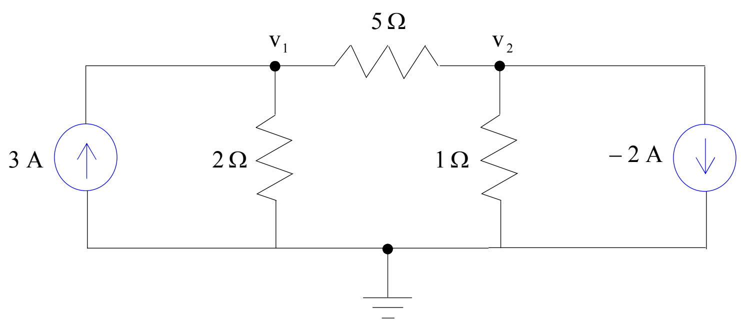
Um circuito pode ser resolvido por um sistema de $(N - 1)$ equações, se usarmos o *Método dos Nós*, ou por um sistema de $L = (B - N + 1)$ equações, se usarmos o *Método das Malhas*. Ou seja, dependendo da *topologia* do circuito, pode ser mais fácil resolvê-lo pelo Método dos Nós ou pelo Método das Malhas. Estes métodos são seguidamente descritos em mais pormenor.

3.2 Método dos Nós

Um circuito com N nós terá $(N - 1)$ *tensões nodais* como incógnitas e $(N - 1)$ equações. Considere, por exemplo, o seguinte circuito com 3 nós:



Vamos enumerar os nós e definir 2 tensões nodais como incógnitas: v_1 é a tensão entre os nós 1 e 3; v_2 é a tensão entre os nós 2 e 3. Assim, o nó 3 é designado por *nó de referência*, o que nos permitirá simplificar a representação das tensões no circuito.



A tensão entre os nós 1 e 2 é dada por: $(v_1 - v_2)$; a tensão entre os nós 2 e 1 é dada por: $(v_2 - v_1)$; a tensão entre os nós 3 e 1 é dada por: $-v_1$; a tensão entre os nós 3 e 2 é dada por: $-v_2$.

Aplicando a Lei dos Nós para os nós 1 e 2, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{v_1}{2} + \dfrac{(v_1 - v_2)}{5} = 3 \\[2ex] \dfrac{v_2}{1} + \dfrac{(v_2 - v_1)}{5} = 2 \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} 0{,}7\ v_1 - 0{,}2\ v_2 = 3 \\[2ex] -0{,}2\ v_1 + 1{,}2\ v_2 = 2 \end{cases}$$

o que dá o seguinte resultado:

$v_1 = 5\ \text{V}$; $v_2 = 2{,}5\ \text{V}$

e a tensão entre os nós 1 e 2 é:

$(v_1 - v_2) = 2{,}5\ \text{V}$

Agora qualquer corrente ou potência associadas com elementos deste circuito podem ser determinadas.

Por exemplo, a corrente na resistência de $2\ \Omega$ é dada por:

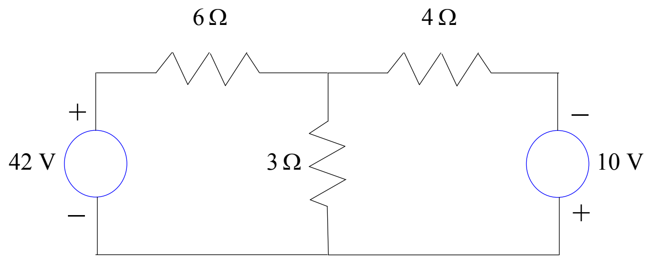
$$i = \frac{v_1}{2} = 2{,}5\ \text{A}$$

sendo a potência absorvida pela resistência de $2\ \Omega$ dada por:

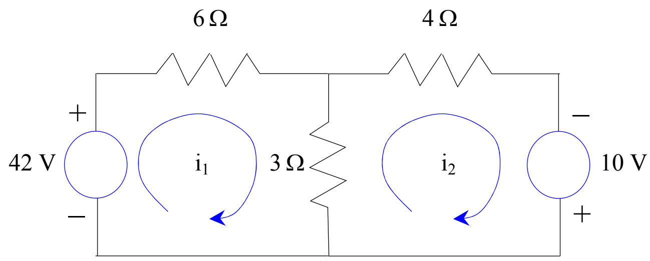
$$p = \frac{{v_1}^2}{2} = 2\ {i_1}^2 = 12{,}5\ \text{W}$$

3.3 Método das Malhas

Um circuito com N nós e B ramos/elementos terá $L = (B - N + 1)$ *correntes de malha* como incógnitas e $L = (B - N + 1)$ equações. Considere, por exemplo, o seguinte circuito com 2 malhas independentes:



Neste circuito tem-se $B = 5$ e $N = 4$, pelo que, $L = 2$. Vamos definir 2 correntes de malha como incógnitas: i_1 é a corrente na malha da esquerda; i_2 é a corrente na malha da direita.



A corrente na resistência de $3\,\Omega$, no sentido descendente, é dada por: $(i_1 - i_2)$; a corrente na resistência de $3\,\Omega$, no sentido ascendente, é dada por: $(i_2 - i_1)$. Pelo que, a *corrente de ramo* é a combinação algébrica das *correntes de malha* que passam nesse ramo.

Aplicando a Lei das Malhas para as duas malhas independentes deste circuito temos:

$$\begin{cases} -42 + 6\,i_1 + 3\,(i_1 - i_2) = 0 \\ \\ 3\,(i_2 - i_1) + 4\,i_2 - 10 = 0 \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} 9\,i_1 - 3\,i_2 = 42 \\ -3\,i_1 + 7\,i_2 = 10 \end{cases}$$

o que dá o seguinte resultado:

$i_1 = 6\ \text{A}\ ;\ i_2 = 4\ \text{A}$

e a corrente na resistência de $3\,\Omega$, no sentido descendente, é dada por:

$i_3 = (i_1 - i_2) = 2\ \text{A}$

Agora qualquer tensão ou potência associadas com elementos deste circuito podem ser determinadas.

Por exemplo, a tensão na resistência de $3\,\Omega$ é dada por:

$v = 3\,i_3 = 6\ \text{V}$

sendo a potência absorvida pela resistência de $3\,\Omega$ dada por:

$$p = 3\,i_3^{\,2} = \frac{v^2}{3} = 12\ \text{W}$$

3.4 Linearidade e Sobreposição

Um *circuito linear* que contenha duas ou mais fontes independentes pode ser analisado para obter as várias tensões e correntes nos ramos fazendo com que as fontes actuem uma de cada vez e daí sobrepondo os resultados.

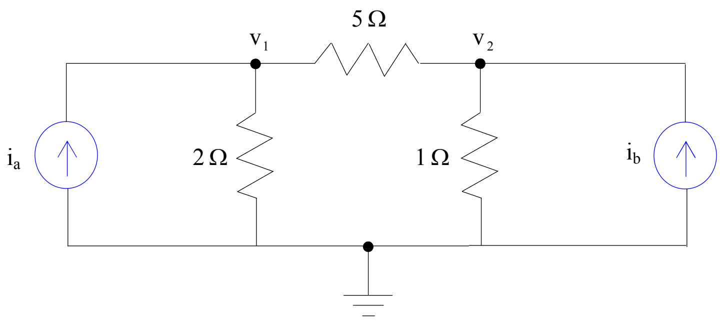
O *Princípio da Sobreposição* afirma então que a resposta (uma determinada corrente ou tensão) em qualquer elemento de uma rede linear, contendo mais de uma fonte, pode ser obtida pela soma das respostas produzidas por cada fonte actuando isoladamente.

Este princípio aplica-se devido à relação linear entre corrente e tensão.

- *Fontes de tensão* que são suprimidas, enquanto uma única fonte actua, são substituídas por *curto-circuitos*.
- *Fontes de corrente* que são suprimidas, enquanto uma única fonte actua, são substituídas por *circuitos abertos*.

A sobreposição não pode ser directamente aplicada ao cálculo da potência, visto que, a potência é proporcional ao quadrado da corrente ou ao quadrado da tensão, não sendo assim linear.

Considere, por exemplo, o seguinte circuito com 3 nós:



Aplicando a Lei dos Nós para os nós 1 e 2, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{v_1}{2} + \dfrac{(v_1 - v_2)}{5} = i_a \\ \\ \dfrac{v_2}{1} + \dfrac{(v_2 - v_1)}{5} = i_b \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} 0{,}7\ v_1 - 0{,}2\ v_2 = i_a \\ \\ -0{,}2\ v_1 + 1{,}2\ v_2 = i_b \end{cases}$$

e a solução destas equações dá-nos as tensões v_1 e v_2.

Estas mesmas equações, e portanto, o mesmo resultado seria obtido se resolvêssemos o problema separadamente com $i_a = 0$ (circuito aberto), e depois com $i_b = 0$ (circuito aberto), e finalmente somássemos.

Para $i_a = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{v_1'}{2} + \dfrac{\left(v_1' - v_2'\right)}{5} = 0 \\ \dfrac{v_2'}{1} + \dfrac{\left(v_2' - v_1'\right)}{5} = i_b \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} 0{,}7\, v_1' - 0{,}2\, v_2' = 0 \\ -0{,}2\, v_1' + 1{,}2\, v_2' = i_b \end{cases}$$

o que nós dará v_1' e v_2'

Para $i_b = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{v_1''}{2} + \dfrac{\left(v_1'' - v_2''\right)}{5} = i_a \\ \dfrac{v_2''}{1} + \dfrac{\left(v_2'' - v_1''\right)}{5} = 0 \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} 0{,}7\, v_1'' - 0{,}2\, v_2'' = i_a \\ -0{,}2\, v_1'' + 1{,}2\, v_2'' = 0 \end{cases}$$

o que nós dará v_1'' e v_2''

As tensões v_1 e v_2 do circuito completo podem ser obtidas somando-se:

$v_1 = v_1' + v_1''$ e $v_2 = v_2' + v_2''$

e isto pode ser verificado somando-se as equações anteriores:

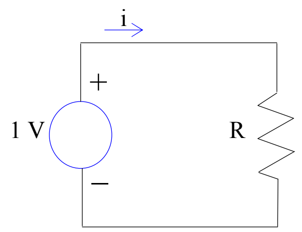
$$\begin{cases} 0{,}7\, \overbrace{\left(v_1' + v_1''\right)}^{v_1} - 0{,}2\, \overbrace{\left(v_2' + v_2''\right)}^{v_2} = i_a \\ -0{,}2\, \underbrace{\left(v_1' + v_1''\right)}_{v_1} + 1{,}2\, \underbrace{\left(v_2' + v_2''\right)}_{v_2} = i_b \end{cases}$$

que é o sistema de equações do circuito completo.

Capítulo 4 – Técnicas de Simplificação de Circuitos

4.1 Fonte de Tensão e Fonte de Corrente Reais

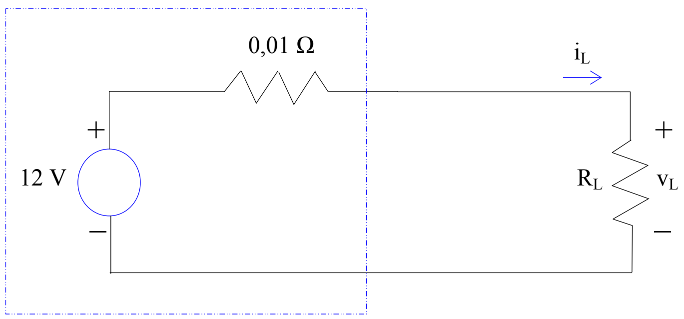
Considere a fonte de tensão ideal de 1 V abaixo indicada:



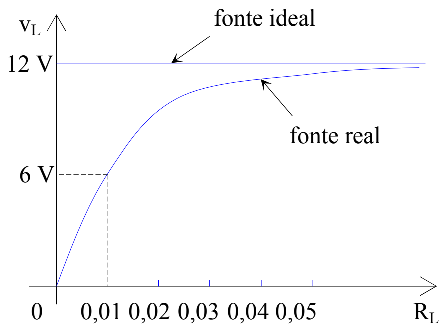
$$\begin{cases} \text{Se } R = 1\ k\Omega & \Rightarrow\ i = 0{,}001\ A \\ \text{Se } R = 1\ \Omega & \Rightarrow\ i = 1\ A \\ \text{Se } R = 1\ m\Omega & \Rightarrow\ i = 1000\ A \\ \text{Se } R = 1\ \mu\Omega & \Rightarrow\ i = 1000000\ A \end{cases}$$

Na prática, no mundo físico real, não existe uma fonte que se comporte desta forma. Na prática, somente para correntes ou potências relativamente pequenas é que a fonte se comporta como ideal.

Fonte de Tensão (real)

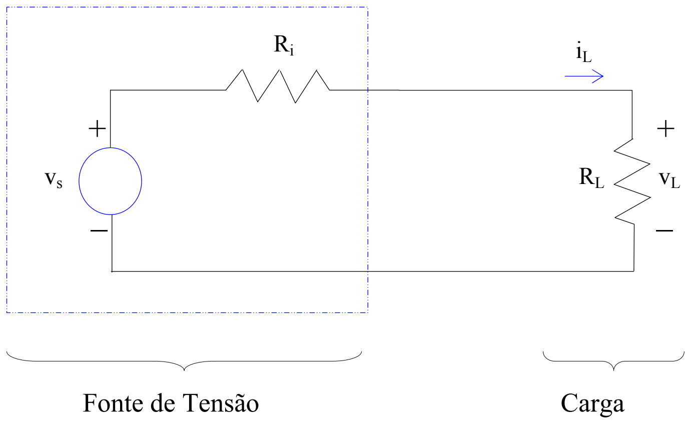


considera-se uma *resistência em série*, embutida, que absorve parte da tensão que vai para a carga R_L.



Neste exemplo, quando a carga R_L é igual à resistência interna de 0,01 Ω, a tensão de 12 V divide-se em 6 V para a resistência interna e 6 V para a carga.

Portanto, na prática, representa-se uma *fonte de tensão real* como uma *fonte de tensão ideal* com uma *resistência interna* R_i:



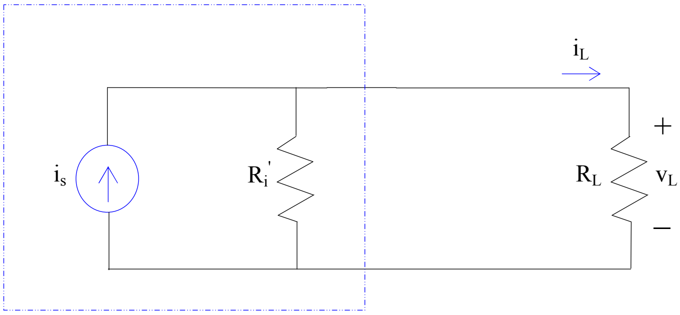
$$v_L = \frac{R_L}{R_i + R_L} v_s$$

pelo que, $v_L = \frac{v_s}{2}$ quando $R_L = R_i$

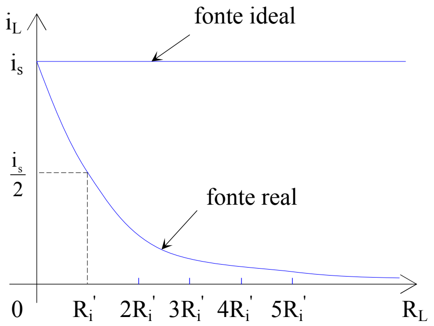
ainda, $i_L = \frac{1}{R_i + R_L} v_s$

Uma fonte de corrente ideal também não existe. Na prática, a corrente que vai para a carga R_L vai decrescendo à medida que a carga aumenta.

Fonte de Corrente (real)



considera-se uma *resistência em paralelo*, embutida, que absorve parte da corrente que vai para a carga R_L.



$$i_L = \frac{R_i'}{R_i' + R_L} i_s$$

pelo que, $i_L = \frac{i_s}{2}$ quando $R_L = R_i'$

ainda, $v_L = \frac{R_i' R_L}{R_i' + R_L} i_s$

4.2 Fontes Equivalentes

Duas fontes são *equivalentes* se elas produzem correntes e tensões idênticas, e portanto potências idênticas, para qualquer carga ligada aos seus terminais.

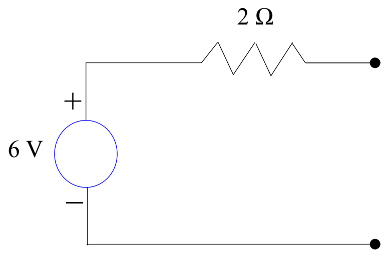
Assim, para cargas R_L iguais, a fonte de tensão e a fonte de corrente reais são equivalentes se:

$$\frac{1}{R_i + R_L} v_s = \frac{R_i^{'}}{R_i^{'} + R_L} i_s \quad \text{ou} \quad \frac{R_L}{R_i + R_L} v_s = \frac{R_i^{'} R_L}{R_i^{'} + R_L} i_s$$

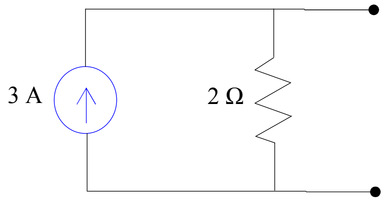
então:

$$R_i = R_i^{'} \quad \text{e} \quad v_s = R_i \, i_s$$

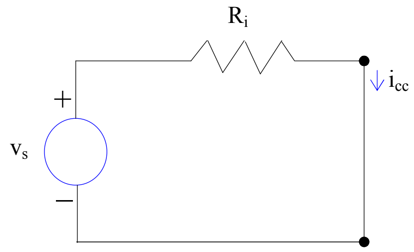
Por exemplo:

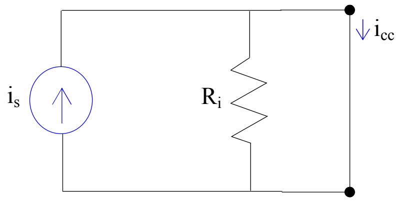


é equivalente a:



Corrente de Curto-Circuito ($R_L = 0$):

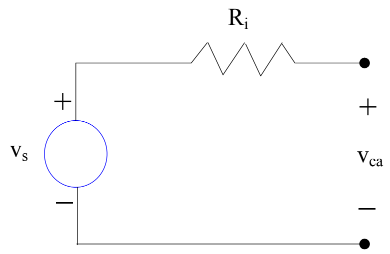


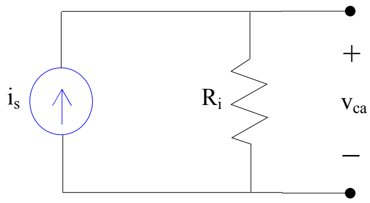


Se forçarmos que seja igual para as duas fontes, tem-se:

$$i_{cc} = i_s = \frac{v_s}{R_i}, \text{ ou seja, } v_s = R_i \, i_s$$

Tensão de Circuito Aberto ($R_L = \infty$):



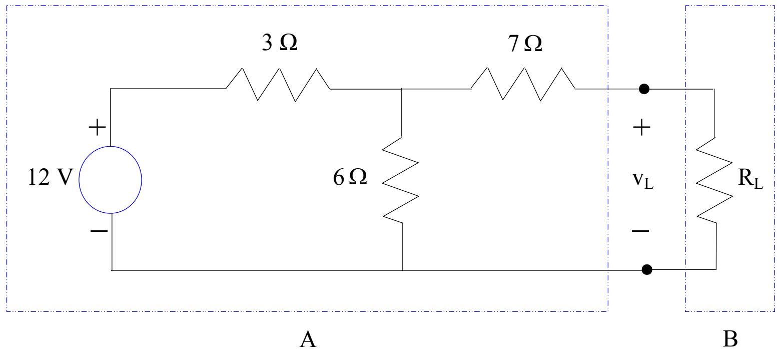


Se forçarmos que seja igual para as duas fontes, tem-se:

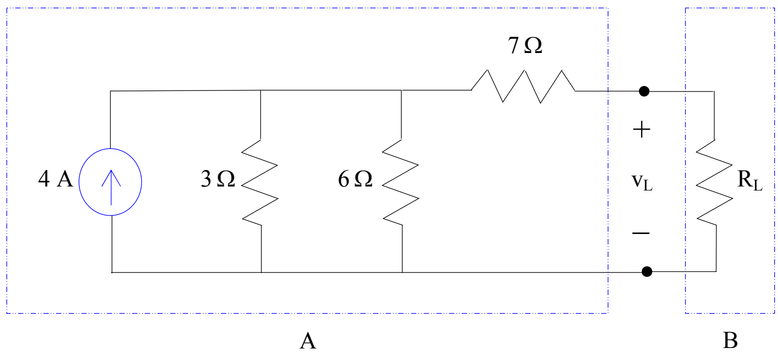
$$v_{ca} = v_s = R_i \, i_s$$

4.3 Teoremas de Thévenin e de Norton

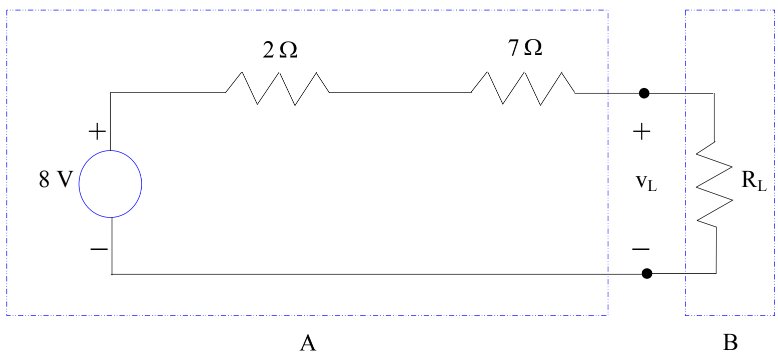
Os *Teoremas de Thévenin e de Norton* permitem realizar uma análise parcial do circuito, nomeadamente, determinar a corrente, a tensão e a potência absorvida por uma simples resistência R_L. O *Teorema de Thévenin* diz que é possível substituir tudo menos a resistência R_L por um circuito equivalente que contém apenas uma fonte de tensão em série com uma resistência. Considere, por exemplo, o seguinte circuito:



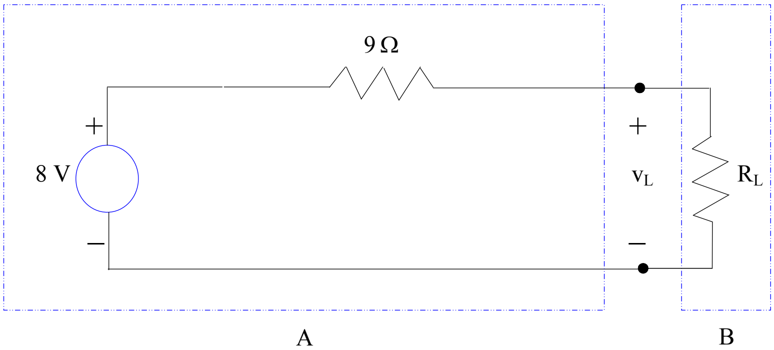
Se transformarmos primeiro a fonte de 12 V com a resistência de 3 Ω em série temos o circuito:



Agora transformando a fonte de 4 A com a resistência de 2 Ω (3 Ω // 6 Ω) em paralelo temos o circuito:



O circuito anterior equivale a:



ou seja, a parte A do circuito original foi substituída por uma fonte de tensão (8 V) em série com uma resistência (9 Ω) – circuito Equivalente-Thévenin.

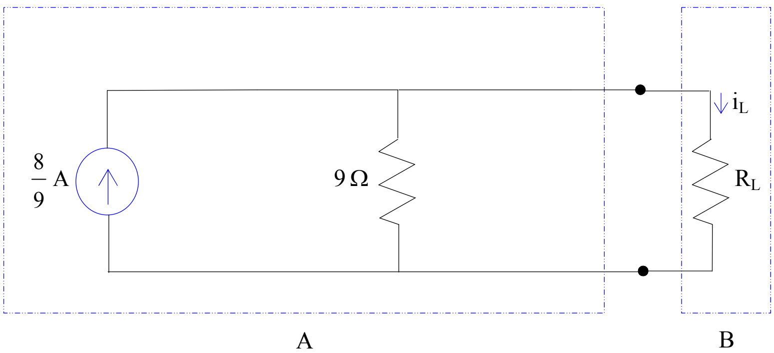
Do ponto de vista da carga R_L o circuito Equivalente-Thévenin é equivalente à parte A do circuito original. A tensão em R_L e a potência absorvida são dadas por:

$$v_L = \frac{R_L}{9+R_L} \times 8$$

$$p_L = \frac{v_L^2}{R_L} = \frac{\left(\dfrac{R_L}{9+R_L} \times 8\right)^2}{R_L} = \left(\frac{8}{9+R_L}\right)^2 R_L$$

Se $R_L = \infty$ (circuito aberto), $v_L = 8$ V.

O *Teorema de Norton* é semelhante ao *Teorema de Thévenin*, na verdade é um corolário deste. Diz que é possível substituir tudo menos a resistência R_L por um circuito equivalente que contém apenas uma fonte de corrente em paralelo com uma resistência. Considerando o exemplo anterior, tem-se:



ou seja, a parte A do circuito original foi substituída por uma fonte de corrente (8/9 A) em paralelo com uma resistência (9 Ω) – circuito Equivalente-Norton.

Do ponto de vista da carga R_L o circuito Equivalente-Norton é equivalente à parte A do circuito original. A corrente em R_L é dada por:

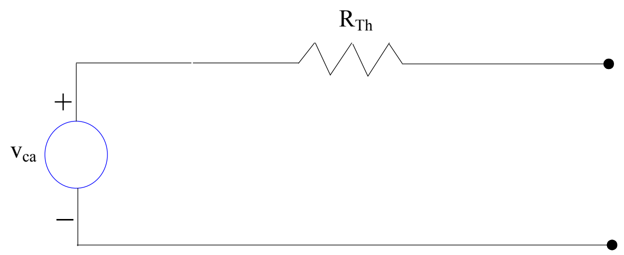
$$i_L = \frac{9}{9 + R_L} \times \frac{8}{9}$$

Se $R_L = 0$ (curto-circuito), $i_L = 8/9$ A.

Assim, tem-se que:

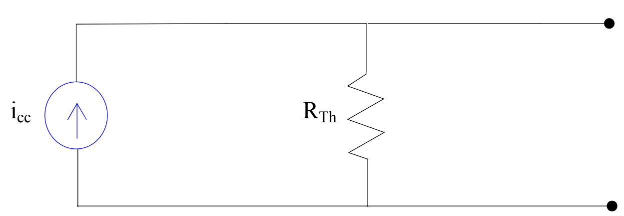
- Qualquer rede linear acessível através de dois terminais pode ser substituída por um circuito equivalente à rede original, consistindo em uma fonte de tensão (v_{ca}) em série com uma resistência (R_{Th}) – *Equivalente de Thévenin*.
- Qualquer rede linear acessível através de dois terminais pode ser substituída por um circuito equivalente à rede original, consistindo em uma fonte de corrente (i_{cc}) em paralelo com uma resistência (R_{Th}) – *Equivalente de Norton*.

O *Equivalente de Thévenin* é dado por:



em que v_{ca} é a tensão de circuito aberto, e R_{Th} é a resistência de Thévenin.

O *Equivalente de Norton* é dado por:



em que i_{cc} é a corrente de curto-circuito, e R_{Th} é a resistência de Thévenin.

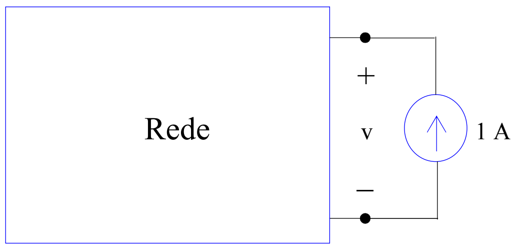
Assim, o *Equivalente de Thévenin* e o *Equivalente de Norton* podem ser obtidos um a partir do outro por transformação da fonte: $v_{ca} = R_{Th}\, i_{cc}$

A resistência de Thévenin, R_{Th}, é a resistência equivalente obtida quando todas as fontes são suprimidas (as fontes de tensão são substituídas por curto-circuitos, enquanto que as fontes de corrente são substituídas por circuitos abertos).

No caso de redes onde existem fontes independentes e dependentes, R_{Th} apenas pode ser calculada através de: $R_{Th} = \frac{v_{ca}}{i_{cc}}$. Pelo que, neste caso é necessário determinar v_{ca} e i_{cc}, sendo R_{Th} obtida pela equação anterior.

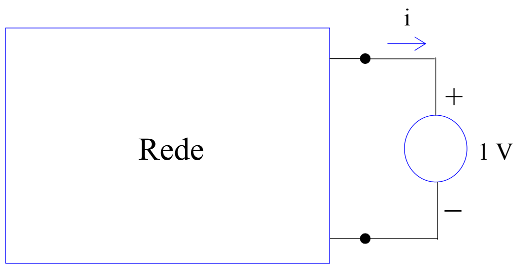
No caso de redes onde existem apenas fontes dependentes, R_{Th} pode ser calculada considerando:

- Uma fonte externa de corrente de 1 A nos terminais da rede:



sendo $R_{Th} = \frac{v}{1}$

- Uma fonte externa de tensão de 1 V nos terminais da rede:

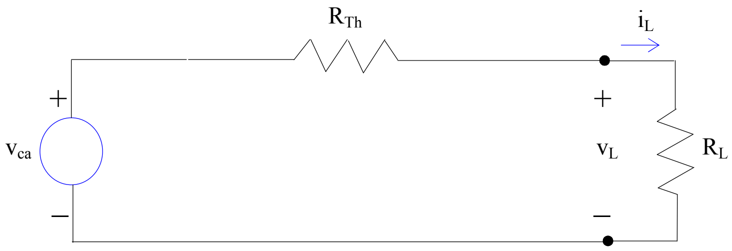


sendo $R_{Th} = \frac{1}{i}$

No caso anterior (apenas fontes dependentes), o Equivalente de Thévenin não tem fonte de tensão ($v_{ac} = 0$), e o Equivalente de Norton não tem fonte de corrente ($i_{cc} = 0$). Ou seja, ambos os Equivalentes de Thévenin e de Norton são constituídos apenas por R_{Th}.

4.4 Transferência Máxima de Potência

Considere o seguinte circuito:



A potência absorvida pela resistência R_L é dada por:

$$p_L = R_L\, i_L^2$$

O valor da resistência R_L para o qual a potência absorvida é máxima é determinado através de:

$$\frac{\partial\, p_L}{\partial\, R_L} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \left(R_L\, i_L^2\right)}{\partial\, R_L} = 0$$

Sendo $i_L = \dfrac{v_{ca}}{R_L + R_{Th}}$ tem-se que:

$$\frac{\partial\left[R_L\left(\dfrac{v_{ca}}{R_L + R_{Th}}\right)^2\right]}{\partial\, R_L} = 0 \Leftrightarrow v_{ca}^2\, \frac{\partial\left[\dfrac{R_L}{\left(R_L + R_{Th}\right)^2}\right]}{\partial\, R_L} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(R_L + R_{ThL}\right)^2 - 2\left(R_L + R_{Th}\right)R_L}{\left(R_L + R_{Th}\right)^4} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\left(R_L + R_{Th}\right)^2} - 2\frac{R_L}{\left(R_L + R_{Th}\right)^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{R_L}{(R_L+R_{Th})^3}=\frac{1}{(R_L+R_{Th})^2} \Leftrightarrow 2\frac{R_L}{R_L+R_{Th}}=1 \Leftrightarrow 2\,R_L=R_L+R_{Th} \Leftrightarrow$$

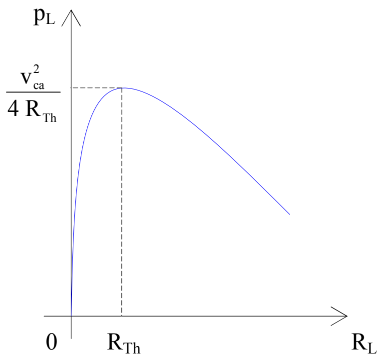
$$\Leftrightarrow R_L=R_{Th}$$

Pelo que, a transferência máxima de potência ocorre quando $R_L = R_{Th}$

A potência máxima é então dada por:

$$p_L=R_{Th}\,i_L^2 \Leftrightarrow p_L=R_{Th}\left(\frac{v_{ca}}{R_{Th}+R_{Th}}\right)^2 \Leftrightarrow p_L=R_{Th}\left(\frac{v_{ca}}{2\,R_{Th}}\right)^2 \Leftrightarrow p_L=\frac{R_{Th}}{4\,R_{Th}^2}\,v_{ca}^2$$

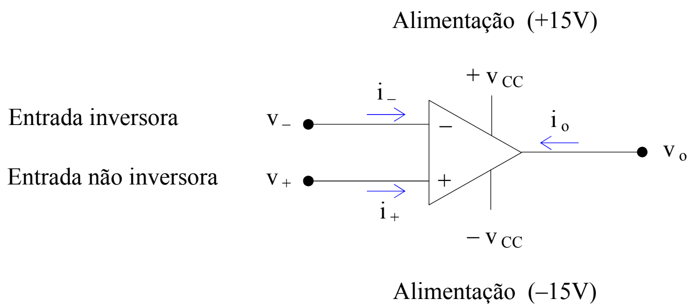
$$\Leftrightarrow p_L=\frac{v_{ca}^2}{4\,R_{Th}}$$



Capítulo 5 – Amplificador Operacional

5.1 Características Ideais do Amplificador Operacional

O *Amplificador Operacional* (*AMPOP*) é um circuito integrado activo com ganho elevado. O *AMPOP* pode ser visto como uma fonte dependente de tensão, em que a tensão de saída é a amplificação da "tensão-diferença" de entrada.



$v_0 = A\ v_i \Leftrightarrow v_0 = A\ (v_+ - v_-)$, sendo $A = \dfrac{v_0}{v_i}$ o ganho do *AMPOP*

O *AMPOP ideal* tem as seguintes características:

- *Resistência de entrada infinita* ($R_i = \infty$);
- *Resistência de saída nula* ($R_o = 0$);
- *Ganho de tensão infinito* ($A = \infty$);
- *Largura de banda infinita* ($BW = \infty$); i.e., o *AMPOP* responde igualmente para todas as frequências, sendo o ganho independente da frequência;
- *Tensão de offset nula*; i.e., quando $v_+ = v_-$ ($v_i = 0$) tem-se que $v_o = 0$;
- *Drift nulo*; i.e., quando $v_i = c^{te}$ tem-se que $v_o = c^{te}$;
- *Tempo de resposta nulo*.

Destas características ideais podemos deduzir duas propriedades muito importantes:

- *Tensão diferencial de entrada nula* ($v_- = v_+$);
- *Corrente nos terminais de entrada nula* ($i_- = 0$ e $i_+ = 0$).

A primeira propriedade determina que os terminais de entrada estão ao mesmo potencial, i.e., em curto-circuito. Contudo, a segunda propriedade faz o curto-circuito como não condutor de corrente, ou como sendo um circuito aberto. Pelo que, diz-se um *curto-circuito virtual*, sendo um conceito muito importante na análise de circuitos com *AMPOP's*.

5.2 Características Reais do Amplificador Operacional

No *AMPOP real* nem a resistência de entrada é infinita nem a resistência de saída é nula. Tipicamente, a resistência de entrada apresenta valores que vão desde alguns MΩ até aos TΩ, enquanto a resistência de saída apresenta valores que vão desde algumas centenas de Ω até apenas alguns Ω.

O ganho a que se referiu anteriormente é o chamado *ganho em malha aberta*, i.e., o ganho do amplificador em si. O valor do ganho pode ser modificado por convenientes ligações exteriores, obtendo-se nesse caso o chamado *ganho em malha fechada*.

Obviamente um ganho infinito não é possível, mas esse ganho é efectivamente muito elevado: tipicamente, entre 10000 e 10000000.

Ainda, deve notar-se que a tensão de saída é limitada pela tensão de alimentação: não podemos ter uma tensão de saída com uma amplitude maior do que $-v_{CC}$ a $+v_{CC}$.

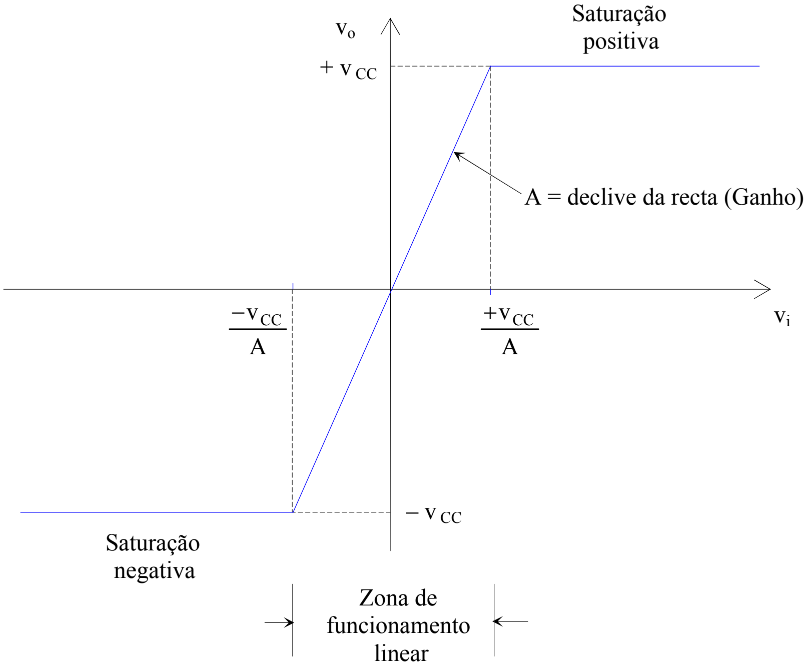
Os valores de v_{CC} são, em geral, inferiores a 20 V: tipicamente 15 V. Quando a tensão de saída atinge $+v_{CC}$ ou $-v_{CC}$ ela satura e aí permanece, e quanto maior for o ganho mais depressa satura.

Por exemplo, seja $A = 10^5$ e a tensão de alimentação $\pm 15\,V$. A máxima variação permitida à tensão de entrada, antes de se entrar em saturação, é portanto neste caso dada por:

$$v_i = \frac{15}{10^5} = 0{,}15\ mV$$

Se o ganho fosse 10^4, a tensão de entrada já poderia ser 10 vezes superior, i.e., 1,5 mV. Portanto, para se ter um funcionamento linear de um *AMPOP*, a tensão de entrada tem que ser da ordem dos mV.

Seguidamente, é apresentada a *característica de transferência* de um *AMPOP*, i.e., o traçado da tensão de saída em função da tensão de entrada:



- $|v_i| < \left|\frac{v_{CC}}{A}\right| \Rightarrow v_0 = A\,v_i \Leftrightarrow v_0 = A\left(v_+ - v_-\right)$; zona de funcionamento linear;
- $v_i > \frac{+v_{CC}}{A} \Rightarrow v_0 = +v_{CC}$; *AMPOP* saturado positivamente;
- $v_i < \frac{-v_{CC}}{A} \Rightarrow v_0 = -v_{CC}$; *AMPOP* saturado negativamente.

O ganho do *AMPOP* pode traduzir-se numa distorção do sinal à entrada, sendo tanto maior essa distorção quanto maior for o ganho. Contudo, o valor do ganho poderá ser controlado mediante ligações externas, dando assim ao *AMPOP* maior flexibilidade.

No *AMPOP real* a largura de banda (espectro de frequências ao longo do qual o *AMPOP* funciona com as suas características nominais) é finita. Além disso, não se pode ter num *AMPOP real* um ganho elevado com uma largura de banda também elevada. Aliás, estas duas características são naturalmente incompatíveis. Verifica-se no entanto que em geral, para cada *AMPOP*, o produto do ganho pela largura de banda é sensivelmente constante, constituindo um parâmetro característico: factor de mérito (*gain bandwidth*).

Anteriormente foi referido que o *AMPOP* amplifica a "tensão-diferença" entre as entradas não inversora e inversora. Contudo, se existir uma componente comum às duas entradas, de acordo com a equação $v_0 = A\left(v_+ - v_-\right)$ essa componente não aparecia na saída.

Na realidade a tensão de saída depende não só da diferença das tensões de entrada, mas também da semi-soma das tensões de entrada. Assim, num *AMPOP real* tem-se que:

$$v_0 = A_d\left(v_+ - v_-\right) + A_c\left(\frac{v_+ + v_-}{2}\right)$$

sendo A_d o ganho de modo diferencial e A_c o ganho de modo comum.

O facto da tensão de saída depender de A_c é tipicamente indesejável, pelo que se procura ter $A_d >> A_c$ de modo a minimizar a influência de A_c na tensão de saída. A razão entre os dois ganhos é denominada de *factor de rejeição do modo comum* (CMRR – *Common Mode Rejection Ratio*):

$$\mathrm{CMRR} = \frac{A_d}{A_c}$$

Um elevado CMRR é particularmente importante quando se pretende amplificar pequenas diferenças de sinal na presença de um elevado sinal comum, i.e., na presença de elevados valores de ruído.

A suposição de que nos terminais de entrada do *AMPOP* não há corrente também não é real. Os valores típicos para esta corrente variam entre 300 e 1500 nA.

Um caso particular do funcionamento em modo comum é aquele em que os terminais de entrada são curto-circuitados. Nessas condições seria de esperar que a tensão de saída fosse nula. Na prática tal não acontece, pelo que deve ser aplicada uma tensão diferencial à entrada de modo a fazer com que a tensão de saída seja nula. A esta tensão que aparece sobreposta a qualquer sinal de saída do amplificador dá-se o nome de *tensão de desequilíbrio à entrada* (*input offset voltage*). Esta tensão é variável com a temperatura, sendo denominada *input offset voltage drift*.

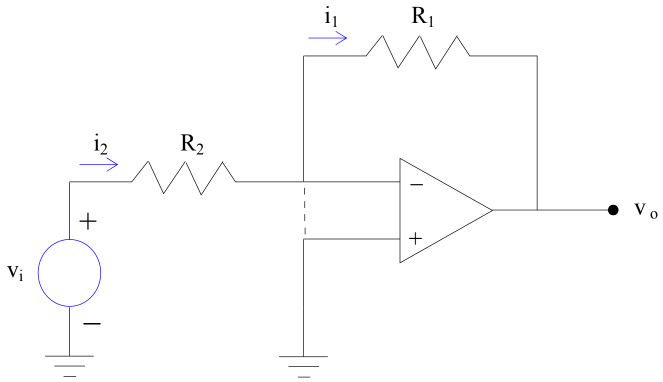
Num *AMPOP ideal* a tensão de saída segue, sem atraso, a tensão de entrada. Num *AMPOP real* há sempre atrasos, i.e., taxas de crescimento temporal limitadas.

É costume definir uma grandeza (*slew rate*) que traduz a velocidade máxima de resposta da saída a sinais de grande variação. Por exemplo, um *slew rate* de $0{,}5\ \mathrm{V}/\mu\mathrm{s}$ significa que o *AMPOP* demora $20\ \mu\mathrm{s}$ a variar $10\ \mathrm{V}$ a sua tensão de saída. O efeito do *slew rate* é distorcer o sinal quando este ultrapassa a capacidade de resposta do *AMPOP*.

Dada a importância das montagens de *AMPOP's* com *realimentação* (*feedback*), apresentam-se a seguir algumas montagens, que servem para exemplificar como se pode obter a relação entre a tensão de saída e a tensão de entrada.

Deste modo, consegue-se que as características de um *AMPOP* dependam de componentes passivos e não de componentes activos (cujas características são sempre mais difíceis de controlar). Contudo, o ganho com realimentação é menor do que sem realimentação.

5.3 Circuito Inversor



Considerando o *AMPOP ideal*, tem-se:

- $v_- = v_+ \Rightarrow v_- = 0V$
- $i_- = 0 \Rightarrow i_1 = i_2$

Atendendo ao curto-circuito virtual, tem-se:

$$-v_i + R_2\, i_2 = 0 \Leftrightarrow i_2 = \frac{v_i}{R_2}$$

$$R_1\, i_1 + v_o = 0 \Leftrightarrow i_1 = -\frac{v_o}{R_1}$$

Pelo que, obtém-se:

$$i_1 = i_2 \Leftrightarrow -\frac{v_o}{R_1} = \frac{v_i}{R_2} \Leftrightarrow v_o = -\frac{R_1}{R_2}\, v_i$$

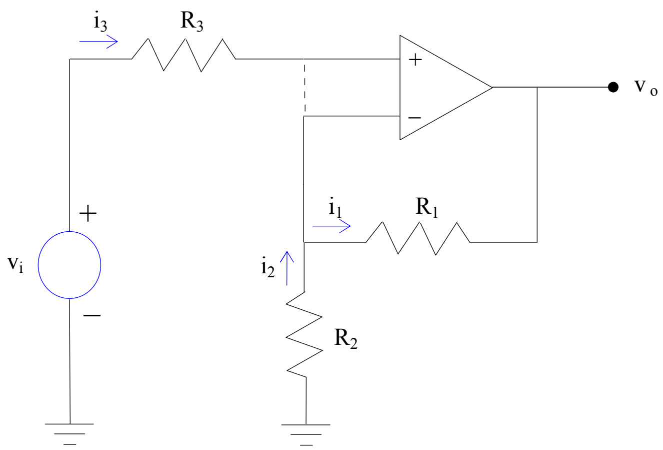
Assim, o ganho é exclusivamente definido por componentes externos (R_1 e R_2) e não depende do próprio *AMPOP*, i.e., das suas características e componentes internos.

O *AMPOP* funciona na zona linear (i.e., não está saturado) quando:

$$|v_o| < |v_{CC}| \Leftrightarrow \left| -\frac{R_1}{R_2}\, v_i \right| < |v_{CC}| \Leftrightarrow |v_i| < \frac{|v_{CC}|}{R_1 / R_2}$$

A realimentação permite então projectar o ganho para o valor desejado, muito embora com redução do ganho global, além de permitir uma tensão de entrada v_i correspondentemente maior, sem saturação.

5.4 Circuito Não Inversor



Considerando o *AMPOP ideal*, tem-se:

- $v_- = v_+$
- $i_- = 0 \quad \Rightarrow \; i_1 = i_2$
- $i_+ = 0 \quad \Rightarrow \; v_+ = v_i$

Atendendo ao divisor de tensão, tem-se:

$$v_- = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_o$$

Pelo que, obtém-se:

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} v_o = v_i \Leftrightarrow v_o = \frac{R_1 + R_2}{R_2} v_i \Leftrightarrow v_o = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) v_i$$

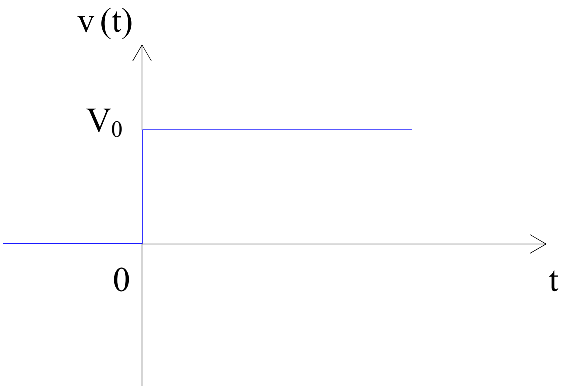
O *AMPOP* funciona na zona linear quando:

$$|v_o| < |v_{CC}| \Leftrightarrow \left|\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) v_i\right| < |v_{CC}| \Leftrightarrow |v_i| < \frac{R_2}{R_1 + R_2} |v_{CC}|$$

Capítulo 6 – Sinais

6.1 Função Escalão Unitário

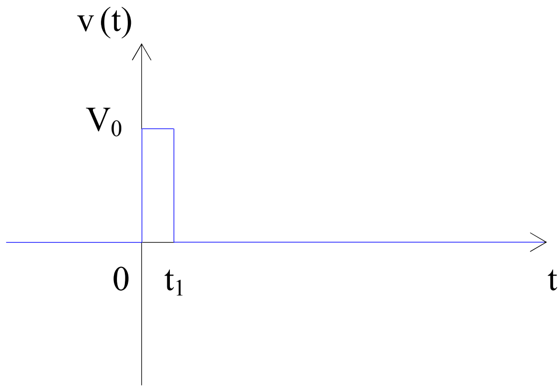
$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ V_0, & t > 0 \end{cases}$$



Escalão unitário: $u_1(t) \Rightarrow$ Amplitude = 1

6.2 Função Impulso Unitário

$$v(t) = \begin{cases} V_0, & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & t < 0 \text{ e } t > t_1 \end{cases}$$

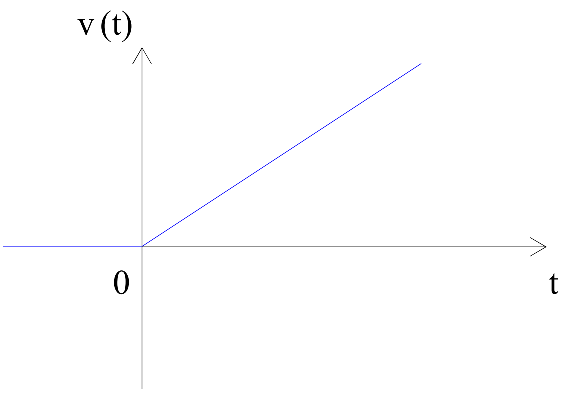


Impulso $\Rightarrow$ $t_1 \rightarrow 0$ e $V_0 \rightarrow \infty$

Impulso unitário: $u_0(t)$ $\Rightarrow$ Área = 1

6.3 Função Rampa Unitária

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ kt, & t \geq 0 \end{cases}$$



Rampa unitária: $u_2(t)$ $\Rightarrow$ Declive = 1

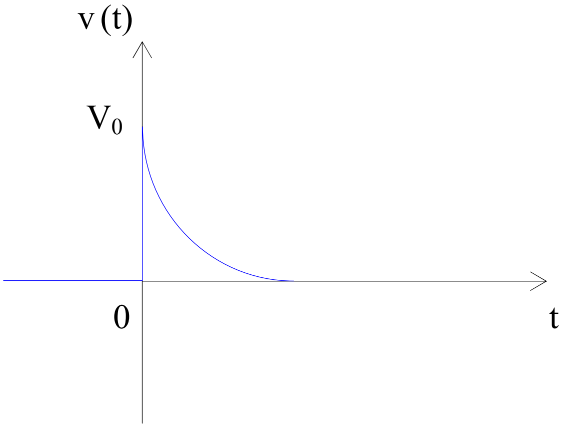
As funções singulares podem ser expressas em função de $u_0(t)$, $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

Ainda, de notar que:

$$u_0(t) = \frac{du_1(t)}{dt} \qquad u_1(t) = \frac{du_2(t)}{dt}$$

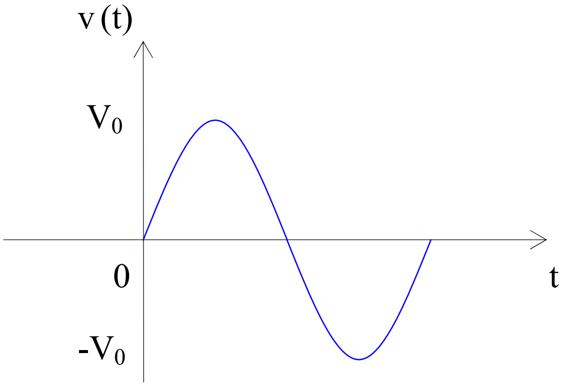
6.4 Função Exponencial

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ V_0\, e^{-at}, & t > 0 \end{cases}$$



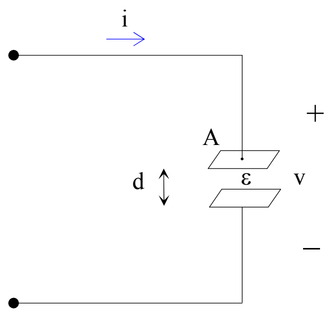
6.5 Função Sinusoidal

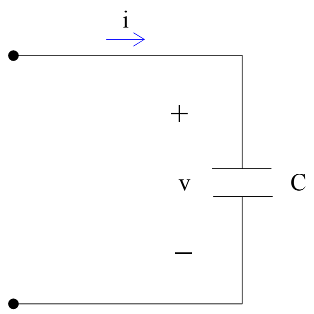
$$v(t) = V_0 \sin(wt + \theta)$$



Capítulo 7 – Capacidade e Auto-Indução

7.1 Condensador





$$C = \frac{\varepsilon\, A}{d}$$

sendo:

- $C \Rightarrow$ Capacitância

  Unidade: F (Farad) em homenagem a Michael Faraday, cientista britânico (1791-1867)

  1 F = 1 C/V $\qquad C = \frac{q}{v}$

- $A \Rightarrow$ Área das placas
- $d \Rightarrow$ Distância entre placas
- $\varepsilon \Rightarrow$ Permitividade ou constante dieléctrica

  para o vazio: $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\ \mathrm{F/m}$

Atendendo a que: $q = C\,v$ e $i(t) = \frac{dq}{dt}$ $\Rightarrow$ a corrente é dada por: $i(t) = C\,\frac{dv}{dt}$

Assim, se a tensão é constante, a corrente é nula. Neste caso, o condensador é um *circuito aberto*. Por outro lado, a tensão não pode variar instantaneamente, pois isto exigiria uma corrente infinita.

A tensão é dada por:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\, dt + v(t_0)$$

A potência é dada por:

$$p = v\, i \Leftrightarrow p = C\, v\, \frac{dv}{dt}$$

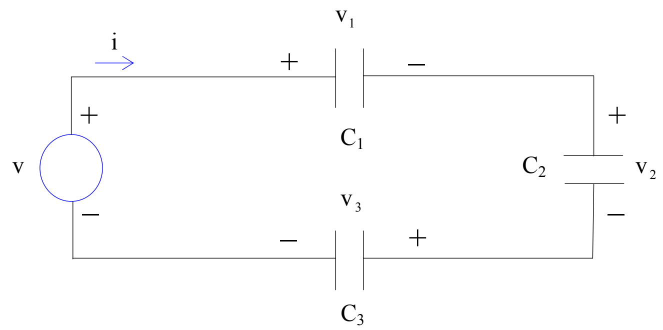
A energia armazenada no condensador é dada por:

$$W = \int_{t_0}^{t} p\, dt \Leftrightarrow W = C\int_{t_0}^{t} v\, \frac{dv}{dt}\, dt \Leftrightarrow W = C\int_{v(t_0)}^{v(t)} v\, dv \Leftrightarrow W = \frac{1}{2} C\left[v^2(t) - v^2(t_0)\right]$$

assumindo que $v(t_0) = 0$, então tem-se que:

$$W = \frac{1}{2} C\, v^2$$

Condensadores em Série



Aplicando a Lei das Malhas, obtém-se:

$$-v + v_1 + v_2 + v_3 = 0 \Leftrightarrow v = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i\, dt + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i\, dt + v_2(t_0) + \frac{1}{C_3}\int_{t_0}^{t} i\, dt + v_3(t_0)$$

considerando: $v_1(t_0) + v_2(t_0) + v_3(t_0) = v(t_0)$, tem-se que:

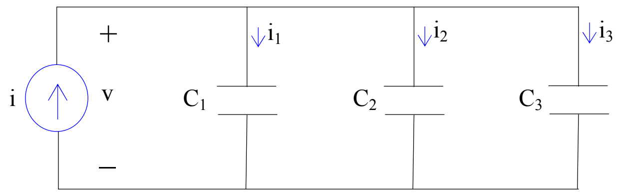
$$v = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)\int_{t_0}^{t} i\,dt + v(t_0) \Leftrightarrow v = \frac{1}{C_{eq}}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v(t_0)$$

Portanto, os condensadores em série (C_1, C_2 e C_3) podem ser substituídos no circuito por: $C_{eq} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3}}$

De forma geral, o *condensador equivalente* a um conjunto de condensadores em série é dado por: $C_{eq} = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{I} \dfrac{1}{C_i}}$

No caso particular de apenas dois condensadores em série, tem-se: $C_{eq} = \dfrac{C_1 \times C_2}{C_1 + C_2}$

Condensadores em Paralelo



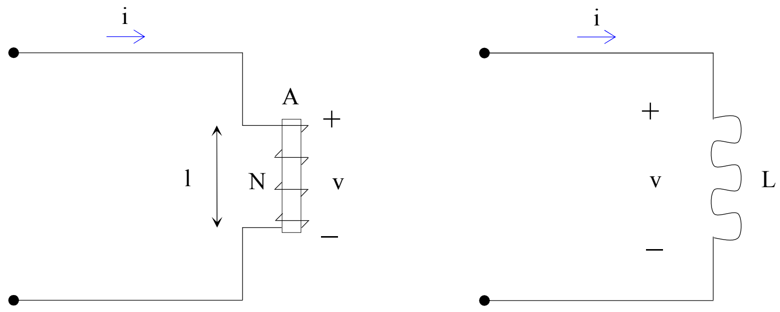
Aplicando a Lei dos Nós, obtém-se:

$$i - i_1 - i_2 - i_3 = 0 \Leftrightarrow i = C_1\frac{dv}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} + C_3\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow i = (C_1 + C_2 + C_3)\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow i = C_{eq}\frac{dv}{dt}$$

Portanto, os condensadores em paralelo (C_1, C_2 e C_3) podem ser substituídos no circuito por: $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$

De forma geral, o *condensador equivalente* a um conjunto de condensadores em paralelo é dado por: $C_{eq} = \sum\limits_{i=1}^{I} C_i$

7.2 Bobina



$$L = \frac{\mu\, N^2\, A}{l}$$

sendo:

- $L \Rightarrow$ Indutância

  Unidade: H (Henry) em homenagem a Joseph Henry, cientista norte-americano (1797-1878)

  $1\ \mathrm{H} = 1\ \mathrm{V.s/A}$

- $\mu \Rightarrow$ Permeabilidade

  para o vazio: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$

- $N \Rightarrow$ Número de espiras
- $A \Rightarrow$ Área seccional
- $l \Rightarrow$ Comprimento

A tensão é dada por:

$$v(t) = L\,\frac{di}{dt}$$

Assim, se a corrente é constante, a tensão é nula. Neste caso, a bobina é um *curto-circuito*. Por outro lado, a corrente não pode variar instantaneamente, pois isto exigiria uma tensão infinita.

A corrente é dada por:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\ dt + i(t_0)$$

A potência é dada por:

$$p = v\,i \Leftrightarrow p = L\,i\,\frac{di}{dt}$$

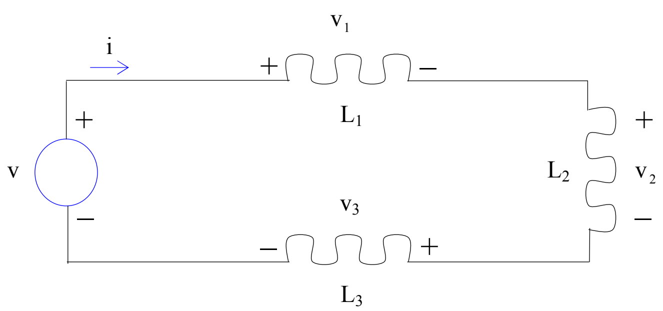
A energia armazenada na bobina é dada por:

$$W = \int_{t_0}^{t} p\,dt \Leftrightarrow W = L\int_{t_0}^{t} i\,\frac{di}{dt}\,dt \Leftrightarrow W = L\int_{i(t_0)}^{i(t)} i\,di \Leftrightarrow W = \frac{1}{2}\,L\left[i^2(t) - i^2(t_0)\right]$$

assumindo que $i(t_0) = 0$, então tem-se que:

$$W = \frac{1}{2}\,L\,i^2$$

Bobinas em Série



Aplicando a Lei das Malhas, obtém-se:

$$-v + v_1 + v_2 + v_3 = 0 \Leftrightarrow v = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + L_3\frac{di}{dt} \Leftrightarrow v = (L_1 + L_2 + L_3)\frac{di}{dt}$$

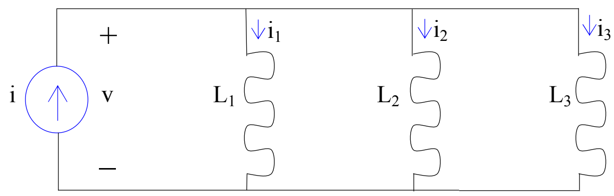
$$\Leftrightarrow v = L_{eq}\frac{di}{dt}$$

Portanto, as bobinas em série (L_1, L_2 e L_3) podem ser substituídas no circuito por: $L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3$

De forma geral, a *bobina equivalente* a um conjunto de bobinas em série é dada por:

$$L_{eq} = \sum_{i=1}^{I} L_i$$

Bobinas em Paralelo



Aplicando a Lei dos Nós, obtém-se:

$$-i + i_1 + i_2 + i_3 = 0 \Leftrightarrow i = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v\, dt + i_1(t_0) + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v\, dt + i_2(t_0) + \frac{1}{L_3}\int_{t_0}^{t} v\, dt + i_3(t_0)$$

considerando: $i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0) = i(t_0)$, tem-se que:

$$i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right)\int_{t_0}^{t} v\, dt + i(t_0) \Leftrightarrow v = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v\, dt + i(t_0)$$

Portanto, as bobinas em paralelo (L_1, L_2 e L_3) podem ser substituídas no circuito por:

$$L_{eq} = \frac{1}{\dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2} + \dfrac{1}{L_3}}$$

De forma geral, a *bobina equivalente* a um conjunto de bobinas em paralelo é dada por: $L_{eq} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{I} \dfrac{1}{L_i}}$

No caso particular de apenas duas bobinas em paralelo, tem-se: $L_{eq} = \dfrac{L_1 \times L_2}{L_1 + L_2}$

Capítulo 8 – Circuitos de Primeira Ordem

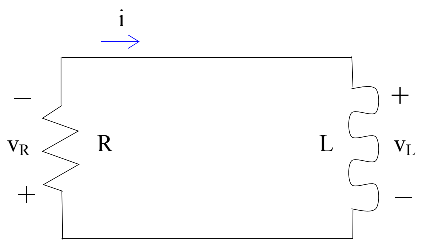
8.1 Circuitos RL e RC Simples

Quando um circuito é comutado de uma condição para outra ocorre um período de *transição*. Depois desse período transitório, diz-se que o circuito atinge o estado *estacionário*.

A aplicação das Leis de Kirchhoff a um circuito que contenha elementos capazes de armazenar energia resulta em uma *equação diferencial*.

Seguidamente, é analisada a *resposta transitória* ou *resposta natural* de circuitos simples RL e RC (com energia armazenada na bobina, para o circuito RL, e no condensador, para o circuito RC) e sem fontes.

Circuito RL Simples

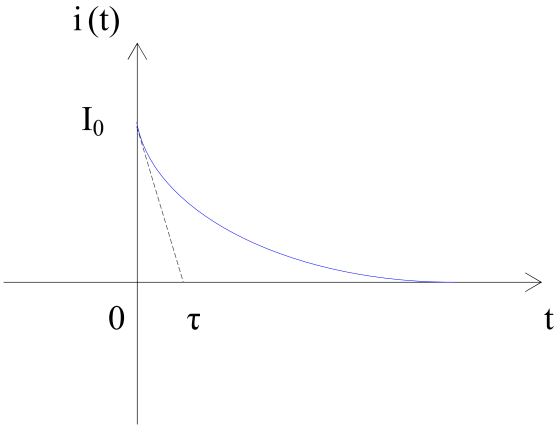


Aplicando a Lei das Malhas, obtém-se:

$$v_R + v_L = 0 \Leftrightarrow R\,i + L\frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}\,i = 0$$

resolvendo a equação diferencial, obtém-se:

$$i(t) = I_0\, e^{-\frac{R}{L}t} \Leftrightarrow i(t) = I_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$I_0 = i(0)$ representa a energia armazenada

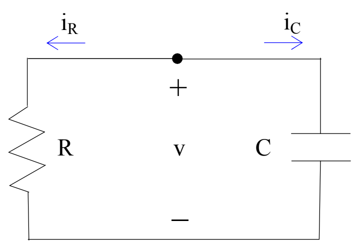
$\tau = \dfrac{L}{R}$ é a constante de tempo

A energia total transformada em calor na resistência é dada por:

$$W = \frac{1}{2} L\, I_0^2$$

que corresponde à energia total armazenada na bobina no instante inicial $t = 0$.

Circuito RC Simples

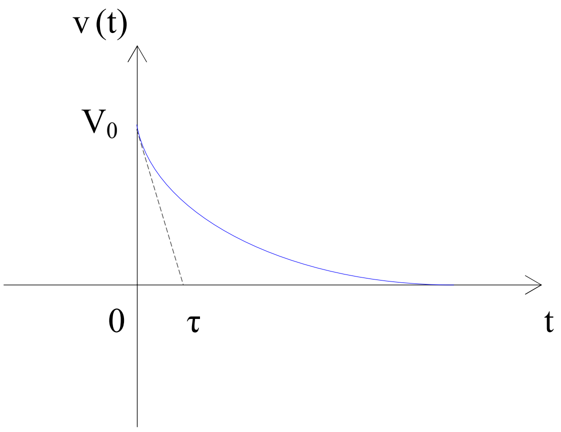


Aplicando a Lei dos Nós (para o nó superior), obtém-se:

$$i_R + i_C = 0 \Leftrightarrow \frac{v}{R} + C\,\frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0$$

resolvendo a equação diferencial, obtém-se:

$$v(t) = V_0\, e^{-\frac{t}{RC}} \Leftrightarrow v(t) = V_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$V_0 = v(0)$ representa a energia armazenada

$\tau = RC$ é a constante de tempo

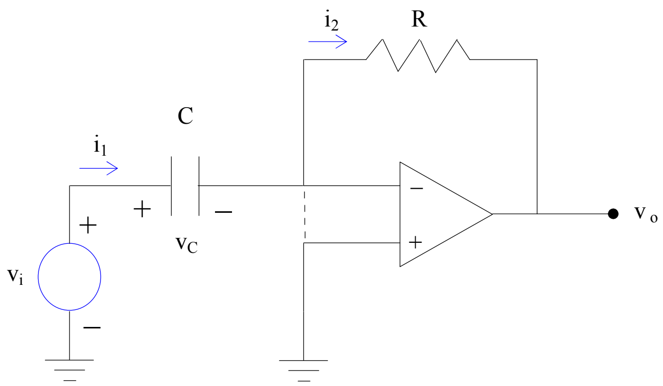
A energia total transformada em calor na resistência é dada por:

$$W = \frac{1}{2} C V_0^{\,2}$$

que corresponde à energia total armazenada no condensador no instante inicial $t = 0$.

8.2 Circuitos Diferenciador e Integrador

Circuito Diferenciador



Considerando o *AMPOP ideal*, tem-se:

- $v_- = v_+ \Rightarrow v_- = 0V$
- $i_- = 0 \Rightarrow i_1 = i_2$

Atendendo ao curto-circuito virtual, tem-se:

$$-v_i + v_C = 0 \Leftrightarrow v_C = v_i$$

$$R\,i_2 + v_o = 0 \Leftrightarrow i_2 = -\frac{v_o}{R}$$

Ainda:

$$i_1 = C\frac{dv_C}{dt} \Leftrightarrow i_1 = C\frac{dv_i}{dt}$$

Pelo que, obtém-se:

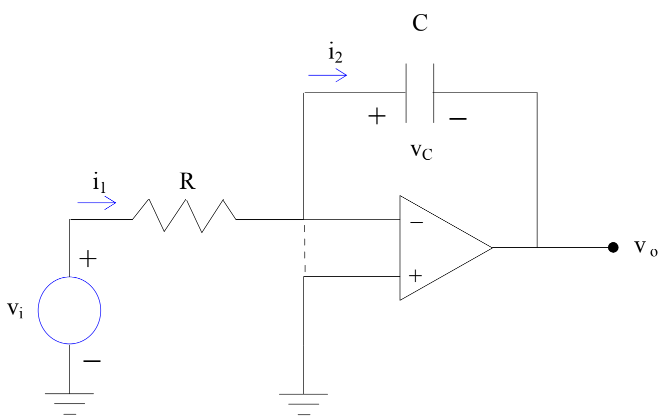
$$i_1 = i_2 \Leftrightarrow C\frac{dv_i}{dt} = -\frac{v_o}{R} \Leftrightarrow v_o = -RC\frac{dv_i}{dt}$$

Se $RC = 1$ tem-se:

$$v_o = -\frac{dv_i}{dt}$$

Deste modo, a tensão de saída é proporcional à derivada da tensão de entrada.

Circuito Integrador



Considerando o *AMPOP ideal*, tem-se:

- $v_- = v_+ \Rightarrow v_- = 0V$
- $i_- = 0 \quad \Rightarrow i_1 = i_2$

Atendendo ao curto-circuito virtual, tem-se:

$$-v_i + R\,i_1 = 0 \Leftrightarrow i_1 = \frac{v_i}{R}$$
$$v_C + v_o = 0 \Leftrightarrow v_o = -v_C$$

Ainda:

$$i_2 = C\frac{dv_C}{dt} \Leftrightarrow i_2 = -C\frac{dv_o}{dt}$$

Pelo que, obtém-se:

$$i_1 = i_2 \Leftrightarrow \frac{v_i}{R} = -C\frac{dv_o}{dt} \Leftrightarrow \frac{dv_o}{dt} = -\frac{v_i}{RC} \Leftrightarrow v_o = -\frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} v_i\,dt + v_C(t_0)$$

Se $RC = 1$ e $v_C(t_0) = 0$ tem-se:

$$v_o = -\int_{t_0}^{t} v_i\,dt$$

Deste modo, a tensão de saída é proporcional ao integral da tensão de entrada.

8.3 Resposta Completa de Circuitos RL e RC

A *resposta completa* de um circuito é composta de duas partes:

- *resposta natural* ou *resposta transitória*;
- *resposta forçada* ou *resposta estacionária*.

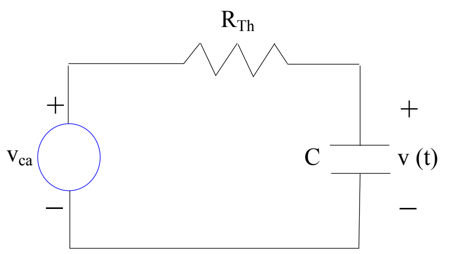
A resposta natural é a solução geral da equação diferencial que representa o circuito, quando a entrada é nula. A resposta forçada é a solução particular da equação diferencial que representa o circuito.

Seguidamente, são consideradas dois tipos de entradas, constante e variável.

Entrada Constante

Devem usar-se os Equivalentes de Thévenin e de Norton para simplificar a análise do circuito. Posteriormente, um de dois tipos de circuitos pode ser considerado:

- Circuito de primeira ordem com condensador



Neste caso, a tensão no condensador é dada por:

$$v(t) = v_{ca} + \left(v(0) - v_{ca}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

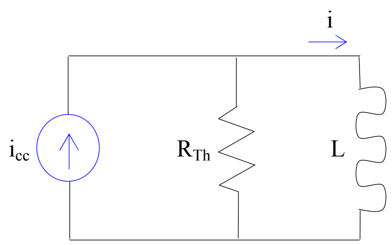
sendo: resposta completa $= v(t)$;

resposta forçada $= v_{ca}$;

resposta natural $= \left(v(0) - v_{ca}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$;

$\tau = RC$

- Circuito de primeira ordem com bobina



Neste caso, a corrente na bobina é dada por:

$$i(t) = i_{cc} + \left(i(0) - i_{cc}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

sendo: resposta completa $= i(t)$;

resposta forçada $= i_{cc}$;

resposta natural $= \left(i(0) - i_{cc}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$;

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Entrada Variável

A equação diferencial que descreve um circuito RL ou RC é representada de forma genérica por:

$$\frac{dx(t)}{dt} + a\,x(t) = y(t)$$

A solução genérica é dada por:

$$x = K\,e^{-at} + e^{-at}\int y\,e^{at}\,dt \Leftrightarrow x = x_n + x_f$$

A resposta natural é sempre dada por: $x_n = K\,e^{-at}$; K obtém-se das condições iniciais.

A resposta forçada é dada por:

- $x_f = \frac{M}{a}$, se $y(t) = M$
- $x_f = \frac{e^{bt}}{a+b}$, se $y(t) = e^{bt}$
- $x_f = A\sin wt + B\cos wt$, se $y(t) = M\sin(wt + \theta)$

Capítulo 9 – Circuitos de Segunda Ordem

9.1 Circuito RLC

Neste capítulo é determinada a *resposta completa* de um circuito com dois elementos capazes de armazenar de energia (L e C). Este circuito é descrito por uma equação diferencial de segunda ordem, que pode ser dada genericamente por:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\,\alpha\,\frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2\,x(t) = f(t)$$

em que:

- α é o coeficiente de amortecimento
- ω_0 é a frequência de ressonância

Usando o operador diferencial: $s^n = \frac{d^n}{dt^n}$, obtém-se a equação característica de um circuito de segunda ordem, dada por: $s^2 + 2\,\alpha\,s + \omega_0^2 = 0$

Esta equação característica tem duas soluções: s_1 e s_2. Estas soluções são denominadas de frequências naturais do circuito de segunda ordem.

Um circuito de segunda ordem pode ser caracterizado como:

- *Sobreamortecido*, se s_1 e s_2 são reais e diferentes, ou, $\alpha > \omega_0$;
- *Criticamente amortecido*, se s_1 e s_2 são reais e iguais (pólo duplo), ou, $\alpha = \omega_0$;
- *Subamortecido*, se s_1 e s_2 são complexos conjugados, ou, $\alpha < \omega_0$.

A resposta completa de um circuito de segunda ordem é a soma da resposta natural com a resposta forçada: $x = x_n + x_f$

A resposta natural depende das frequências naturais do circuito. No caso de um circuito:

- *Sobreamortecido*, $s_1, s_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \Rightarrow x_n = A_1 e^{-s_1 t} + A_2 e^{-s_2 t}$;
- *Criticamente amortecido*, $s_1, s_2 = -\alpha \Rightarrow x_n = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}$;
- *Subamortecido*, $s_1, s_2 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d$

$$\Rightarrow x_n = (A_1 \cos\omega_d t + A_2 \operatorname{sen}\omega_d t) e^{-\alpha t}.$$

A resposta forçada depende da entrada do circuito, sendo dada por:

- $x_f = A$, se $f(t) = K$ (constante)
- $x_f = A + Bt$, se $f(t) = Kt$ (rampa)
- $x_f = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t$, se $f(t) = K\cos\omega t$ ou $f(t) = K\operatorname{sen}\omega t$ (sinusoidal)
- $x_f = A\, e^{-bt}$, se $f(t) = K\, e^{-bt}$ (exponencial)